ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÀI GIẢNG

CƠ SỞ TOÁN HỌC 1 CỦA VIỆC DẠY HỌC TOÁN TIỂU HỌC

Giảng viên: TS. Vũ Đình Chinh

ĐÀ NẴNG - 2021

CHƯƠNG 1. CƠ SỞ LÍ THUYẾT TẬP HỢP

1.1. TẬP HỢP

1.1.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp là khái niệm nguyên thuỷ của Toán học, được công nhận và dùng để xây dựng nên các khái niệm khác.

Tập hợp bao gồm các đối tượng có chung một tính chất nào đó. Mỗi đối tượng trong một tập hợp gọi là một phần tử của tập hợp đó.

Chẳng hạn trong thực tế hàng ngày, chúng ta có rất nhiều từ để chỉ "*tập hợp*" như: "*đàn chim*", "*bó hoa*", "*tập thể học sinh*", "*một nhóm bạn bè*", … Các đối tượng có chung một tính chất của các tập hợp đó tương ứng là "*con chim*", "*bông hoa*", "*học sinh*"…

Người ta thường kí hiệu tập hợp bằng các chữ in hoa A, B, C,... các phần tử của tập hợp bằng các chữ in thường a, b, c,...

Để nói rằng a là một phần tử của tập hợp A ta viết $a \in A$ và đọc là "*a thuộc A*" hay *"a là phần tử thuộc tập hợp A"* hay "*A chứa a*".

Ngược lại, ta viết $a \notin A$, đọc là "*a không thuộc A*" hay *"a không phải là một phần tử thuộc tập hợp A"* hay "*A không chứa a*".

Tập không có phần tử nào gọi là tập rỗng và kí hiệu là $\varnothing$.

Ví dụ 1 Tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ Tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$

Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ Tập hợp số thực $\mathbb{R}$

Như vậy $5 \in \mathbb{N}, -2 \notin \mathbb{N}, -4 \in \mathbb{Z}, 3z \notin \mathbb{Z}, 3_7 \in \mathbb{Q}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$,...

Ví dụ 2 Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x_2 + 1 = 0$ là tập hợp rỗng.

1.1.2. Biểu diễn một tập hợp

Để biểu diễn một tập hợp người ta thường dùng các phương pháp sau:

1.1.2.1. Liệt kê tất cả các phần tử

Các phần tử được viết trong dấu { } và phân cách bằng dấu phẩy (hoặc dấu chấm phẩy), mỗi phần tử được liệt kê một lần, thứ tự liệt kê không quan trọng.

- Nếu số phần tử của một tập hợp không quá nhiều thì ta xác định tập hợp bằng cách viết ra tất cả các phần tử của nó.

Ví dụ 3

a. Tập A gồm các học sinh: An, Bình, Khang, Thịnh, Vượng. Ta biểu diễn tập A như sau:

A = {An, Bình, Khang, Thịnh, Vượng}

= { Bình, An, Khang, Thịnh, Vượng}=…

b. Tập B là tập hợp các đồ chơi ở sân trường gồm: đu quay, cầu trượt, ô tô, ngựa gỗ. Ta biểu diễn tập B như sau:

B = {đu quay, cầu trượt, ô tô, ngựa gỗ}

= {cầu trượt, đu quay, ô tô, ngựa gỗ}=…

c. Tập X gồm 4 phần tử a, b, c, d. Ta biểu diễn:

X = {a, b, c, d } = {b, c, d, a } = ...

- Nếu một tập hợp có quá nhiều phần tử hoặc có vô số phần tử, ta không thể viết ra hết các phần tử của nó thì ta dung các dấu chấm chấm, miễn là không gây ra sự hiểu nhầm.

Ví dụ 4 Tập hợp các số tự nhiên chẵn = {0, 2, 4, 6,…, 2n,…}

1.1.2.2. Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử

Khi các phần tử của A cùng có chung một tính chất P thì ta có thể biểu diễn như sau:

A = {x | x có tính chất P } = { x | P(x)}

Kí hiệu "|" thay cho từ "*sao cho*".

Ví dụ 5

a. A là tập hợp các học sinh lớp 2/5, ta viết:

A = {x| x là học sinh lớp 2/5}.

b. B là tập các số nguyên chia hết cho 3, ta viết

B = { a∈ℤ | a chia hết cho 3 }

c. C là tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$, ta viết:

C = {x∈ℝ | $x^2 + 1 = 0$ } = ∅

d. D là tập hợp các nghiệm hữu tỉ của phương trình $x^2 + 2x + 1 = 0$, ta viết:

D = {x∈ ℚ | $x^2 + 2x + 1 = 0$ } = {–1 }

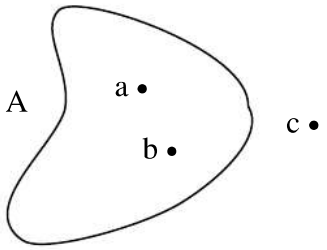
e. E là tập hợp các ước số nguyên dương của 24, ta viết:

$$E = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 24 \} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

1.1.2.3. Mô tả tập hợp bằng biểu đồ Venn

Để minh họa trực quan một tập hợp người ta thường dùng biểu đồ Venn là hình phẳng tạo bởi một đường cong khép kín. Đôi khi các điểm nằm trong hình phẳng đó được dùng để biểu biễn các phần tử của tập hợp.

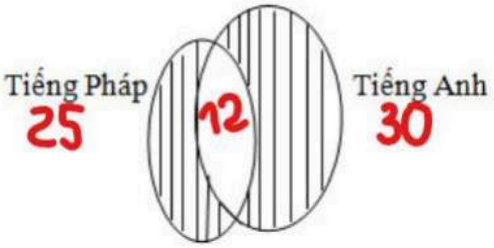
Ví dụ 6



Qua minh họa ở hình vẽ bên: A là tập hợp có phần tử a, b $\in$ A và phần tử c $\notin$ A.

Các biểu đồ Venn thường được dùng để chỉ ra mối quan hệ giữa các tập hợp.

Ví dụ 7 Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, ban tổ chức đã huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó 12 cán bộ phiên dịch được cả 2 thứ tiếng Anh và Pháp. Biểu đồ Venn sau dùng để biểu diễn mối quan hệ giữa tập hợp các cán bộ phiên dịch Tiếng Anh và các cán bộ phiên dịch Tiếng Pháp.



1.1.3. Quan hệ bao hàm và tập hợp bằng nhau

1.1.3.1 Quan hệ bao hàm

Vì một mục đích nào đó, đôi khi ta cần quan tâm đến một số phần tử của tập hợp đã cho. Chẳng hạn, ta cần quan tâm đến các học sinh còn bị "*nói ngọng*", hay "*tính toán chậm*",… trong lớp để luyện tập thêm cho các cháu. Khi đó, số học sinh này là một "*bộ phận*" trong lớp đã cho. "*Bộ phận*" đó được gọi là một *tập hợp con* của tập hợp các học sinh trong lớp.

Tổng quát, ta có:

Định nghĩa

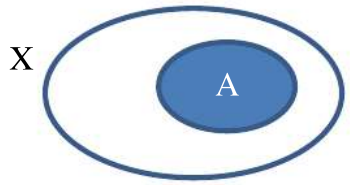
Tập hợp A gọi là *tập con* của tập hợp X nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của X, kí hiệu là A $\subset$ X.

A ⊂ X đọc là: "A *là một bộ phận của* X", hay "A *là tập con của* X", hay "A *bao hàm trong* X", hay "A *chứa trong* X" hay "X *bao hàm* A" hay "X *chứa* A".

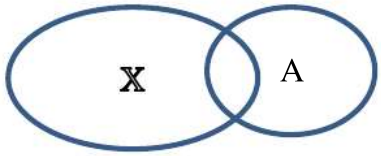
Quan hệ "⊂" gọi là quan hệ bao hàm.

Tập hợp A gọi là *tập con thực sự* của tập hợp X nếu A ⊂ X và A ≠ X, nghĩa là A ⊂ X và có ít nhất một phần tử x ∈ X mà x ∉ A.

Nếu A không phải là tập con của B thì ta kí hiệu A ⊄ X (đọc là "A *không chứa trong* X" hay "A *không bao hàm trong* X")



A ⊂ X



A ⊄ X

Ví dụ 8

a. Tập hợp các học sinh nam trong lớp 2/5 là tập con của tập hợp các học sinh trong lớp đó.

b. Tập hợp các học sinh có năng khiếu về vẽ trong lớp 5/4 là tập con của tập hợp các học sinh trong lớp đó.

Ví dụ 9

a. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;

b. Tập $\mathbb{N}$ là tập con thực sự của các tập hợp $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$;

c. {2, 4, 7} ⊂ {1, 2, 4, 7, 9}; {2, 4, 7} ⊄ {1, 3, 4, 7, 9};

d. $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$

e. Tập hợp các hình vuông là tập con của tập hợp các hình chữ nhật.

1.1.3.2. Tập hợp bằng nhau

Hai tập hợp X và Y gọi là bằng nhau nếu mỗi phần tử của X đều thuộc Y và mỗi phần tử của Y đều thuộc X. Kí hiệu là X = Y.

$$X = Y \Leftrightarrow X \subset Y \text{ và } Y \subset X$$

Ví dụ 10

Cho hộp A là tập hợp gồm một bút chì và một bút màu. Hộp B là tập hợp cũng gồm một bút chì, một bút màu giống hệt như hộp A.

Hai tập hợp này khác nhau vì bút chì và bút màu ở hộp B chỉ giống hệt chứ không phải là bút chì và bút màu trong hộp A.

Ví dụ 11

a. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ và $Y = \{1, -3\}$ thì $X = Y$;

b. Tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ và tập $B = [-3 ; 1]$ thì $A = B$;

c. Tập $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ và tập $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ không bằng nhau.

1.1.3.3. Các tính chất của quan hệ bao hàm

Định lý 1.1

Cho A, B và C là các tập hợp. Quan hệ bao hàm có các tính chất sau đây:

1. $\varnothing \subset A$;

2. Tính phản xạ: $A \subset A$;

3. Tính phản đối xứng: Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì $A = B$;

4. Tính bắc cầu: Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

Chứng minh

1, 2 và 3. Suy ra từ định nghĩa.

4. $\forall x \in A$, vì $A \subset B$ nên $x \in B$, mặt khác vì $B \subset C$ nên từ $x \in B$ suy ra $x \in C$.

Vậy với $\forall x \in A$ suy ra $x \in C$, tức là $A \subset C$.

1.1.3.4. Tập các tập hợp con của một tập hợp

Cho X là một tập hợp, tập các tập con của tập X kí hiệu là $\wp(X)$.

$$\wp(X) = \{A \mid A \subset X\}$$

Ví dụ 12

a. Cho $X = \{a, b, c\}$, X có các tập con sau đây: $\varnothing$, X, {a}, {b},{c},{a, b},{a, c},{b, c}.

Vậy tập các tập con của tập X là:

$\wp(X) = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

b. Nếu tập X có n phần tử thì $\wp(X)$ có 2^n phần tử.

c. $\wp(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\wp(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

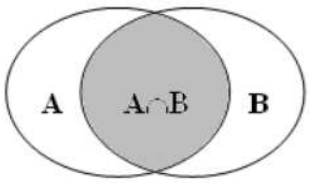
1.1.4. Các phép toán trên tập hợp

Với hai tập hợp A, B đã cho ta có thể xác định một tập hợp duy nhất thỏa mãn một yêu cầu nào đó. Việc xác định tập hợp này là thực hiện một phép toán trên các tập hợp đã cho.

1.1.4.1. Phép giao

Định nghĩa **(Giao của hai tập hợp)**

Cho hai tập hợp A và B. Giao của A và B, kí hiệu $A \cap B$, là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói "A, B không giao nhau" hay "A, B rời nhau".

Ví dụ 13

a. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, e\}$ thì $A \cap B = \{a, b\}$;

b. A là tập hợp các học sinh có năng khiếu về vẽ, B là tập hợp các học sinh có năng khiếu về hát. Vậy $A \cap B$ là tập hợp các học sinh có năng khiếu về vẽ và hát.

c. Với $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho } 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho } 3\}$, ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ chia hết cho } 6\}$.

d. Tập các số hữu tỉ và tập các số vô tỉ là rời nhau.

Ví dụ 14

Cho X là tập nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0$,

Ta có: $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\} = \{-3, 1\}$

Y là tập nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$,

Ta có $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\} = \{-4, 1\}$

Khi đó $X \cap Y$ chính là giao các tập hợp nghiệm của X và Y.

Vậy $X \cap Y = \{1\}$.

Chú ý $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ hoặc $x \notin B$

Định nghĩa **(Giao của các tập hợp)**

Giao của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là tập hợp gồm các phần tử chung của n tập hợp này kí hiệu $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ hay $\bigcap_{i=1}^{n} A$

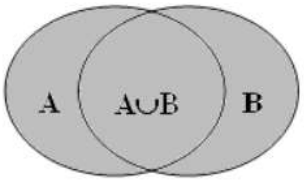
Ví dụ 15

$A = \{a, b, m\}$; $B = \{a, c, 1, m\}$; $C = \{1, 2, m\}$.

Khi đó: $A \cap B \cap C = \{m\}$

1.1.4.2. Phép hợp

Định nghĩa **(Hợp của hai tập hợp)**



Cho hai tập hợp A và B. Hợp của A và B, kí hiệu $A \cup B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

Ví dụ 16

a. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$;

b. A là tập hợp các học sinh có năng khiếu về vẽ, B là tập hợp các học sinh có năng khiếu về hát. Vậy $A \cup B$ là tập hợp các học sinh có năng khiếu về vẽ hoặc có năng khiếu về hát.

Ví dụ 17

Cho X là tập nghiệm nguyên của phương trình:

$x^2 + 2x - 3 = 0$ (1), $X = \{-3, 1\}$.

Y là tập nghiệm nguyên của phương trình:

$x^2 + 3x - 4 = 0$ (2), $Y = \{-4, 1\}$.

Khi đó tập nghiệm nguyên của phương trình tích:

$(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x - 4) = 0$ (3)

(3) là tập các nghiệm của phương trình (1) hoặc (2).

Tức là $X \cup Y = \{ -3, -4, 1\}$

Ví dụ 18

$X = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x - 3 \le 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} / -3 \le x \le 1 \}$,

và $Y = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x - 4 \ge 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} / x \le -4$ hoặc $x \ge 1 \}$ thì

$X \cap Y = \{1\}$, $X \cup Y = \{ x \in \mathbb{R} / x \le -4$ hoặc $x \ge -3\}$.

Chú ý $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ và $x \notin B$

Định nghĩa **(Hợp của các tập hợp)**

Hợp của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là tập hợp gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và kí hiệu $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ hay $\bigcup_{i=1}^{n} A$.

Ví dụ 19

$A = \{a, b, m\}$; $B = \{ a, c, 1, m\}$; $C = \{1, 2, m\}$.

Khi đó: $A \cup B \cup C = \{a, b, c, 1, 2, m\}$

Định lý 1.2 **(Các tính chất của phép toán hợp và giao)**

Cho A, B và C là các tập hợp. Phép toán tập hợp có các tính chất sau đây:

1. Tính giao hoán $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
2. Tính kết hợp $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. Tính phân phối $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Chứng minh

1. và 2. Suy ra từ định nghĩa các phép toán

3. $\forall x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ và ($x \in B$ hoặc $x \in C$)

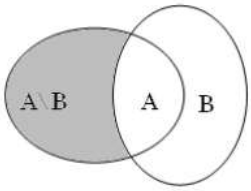
   $\Leftrightarrow (x \in A$ và $x \in B)$ hoặc $(x \in A$ và $x \in C)$

   $\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Tương tự chứng minh hệ thức thứ hai.

1.1.4.3. Phép hiệu của hai tập hợp

Định nghĩa **(Hiệu của hai tập hợp)**



Cho hai tập hợp A và B. Hiệu của A và B, kí hiệu A \ B (hoặc A – B) là tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$

Ví dụ 20

a. A = {a, b, c, d }, B = {a, b, e } thì A\B = {c, d } và B\A = { e }

b. A là tập hợp các học sinh có năng khiếu về vẽ, B là tập hợp các học sinh có năng khiếu về hát. Vậy A\B là tập hợp các học sinh chỉ có năng khiếu về vẽ nhưng không có năng khiếu về hát.

Ví dụ 21

$X = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x - 3 \le 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} / -3 \le x \le 1 \}$,

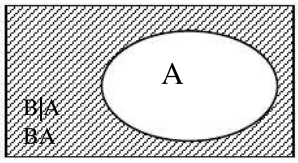
$Y = \{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x - 4 \ge 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} / x \le -4 \text{ hoặc } x \ge 1 \}$

thì $X \setminus Y = \{ x \in \mathbb{R} / -3 \le x < 1 \}$

và $Y \setminus X = \{ x \in \mathbb{R} / x \le -4 \text{ hoặc } x > 1 \}$

Chú ý

$A \setminus B \neq B \setminus A$



Định nghĩa **(Phần bù của một tập hợp)**

Nếu $A \subset B$ thì $B \setminus A$ là *phần bù của A trong B*, kí hiệu $C_B A$ hay $\bar{A}$ khi B đã được xác định rõ.

Ví dụ 22

a. A = {a, b}, B = {a, b, c, d }. Khi đó: $C_B A = B \setminus A = \{c, d\}$

b. Phần bù của tập hợp các học sinh nam trong tập hợp các học sinh của một lớp là tập hợp các học sinh nữ của lớp đó.

c. Phần bù của tập hợp các số tự nhiên trong tập hợp các số nguyên là tập hợp các số nguyên âm.

Định lý 1.3 **(Các tính chất)** Cho A, B và C là các tập hợp tuỳ ý.

a. $A \setminus B \subset A$

b. Nếu $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \setminus D \subset B \setminus C$

c. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

d. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Chứng minh

a. Suy ra từ định nghĩa của phép hiệu

b. Giả sử $x \in A \setminus D \Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin D$.

Do $A \subset B$ và $C \subset D$ nên $x \in B$ và $x \notin C \Leftrightarrow x \in B \setminus C$.

Suy ra $A \setminus D \subset B \setminus C$

c. $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ và $(x \notin B$ và $x \notin C)$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B$ và $x \in A \setminus C$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

d. Chứng minh tương tự (bạn đọc tự chứng minh)

Định lý 1.4 **(Luật De Morgan)** Cho A, B là hai tập hợp con của tập X.

a. $C_X(A \cup B) = (C_X A) \cap (C_X B)$ $(\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B})$

b. $C_X(A \cap B) = (C_X A) \cup (C_X B)$ $(\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B})$

Chứng minh

a. Giả sử $x \in C_X(A \cup B) \Leftrightarrow x \in X$ và $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in X$ và $x \notin A, x \notin B$

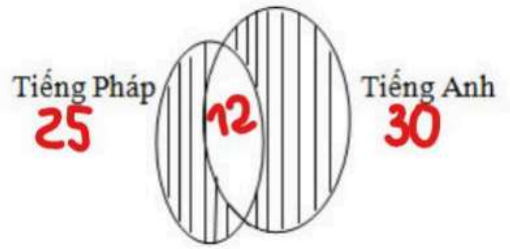
$\Leftrightarrow x \in C_X A$ và $x \in C_X B \Leftrightarrow x \in (C_X A) \cap (C_X B)$.

b. Chứng minh tương tự.

Ví dụ 23 Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, ban tổ chức đã huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó 12 cán bộ phiên dịch được cả 2 thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi:

a. Ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ phiên dịch cho hội nghị đó.

b. Có bao nhiêu cán bộ chỉ dịch được tiếng Anh, chỉ dịch được tiếng Pháp?



Từ biểu đồ Venn, ta có:

Số cán bộ chỉ phiên dịch được Tiếng Pháp là: 30 – 12 = 18 (người)

Số cán bộ chỉ phiên dịch được Tiếng Anh là: 25 – 12 = 13 (người)

Vậy số cán bộ mà Ban tổ chức đã huy động là: 18 + 13 + 12 = 43 (người)

1.1.4.4. Tích Descartes của các tập hợp

Định nghĩa **(Cặp sắp thứ tự)**

Tập hai phần tử {a, b} với quy ước a là phần tử thứ nhất, b là phần tử thứ hai gọi là cặp sắp thứ tự và kí hiệu là (a, b).

Hai cặp (a, b) = (c, d) $\Leftrightarrow$ a = c và b = d.

Tương tự, tập n phần tử $\{a_1, a_2,..., a_n\}$ với quy ước a_1 là phần tử thứ nhất, a_2 là phần tử thứ hai,..., a_n là phần tử thứ n gọi là bộ sắp thứ tự n phần tử và kí hiệu

$(a_1, a_2,... , a_n)$

Định nghĩa **(Tích Descartes)**

Cho hai tập A và B tuỳ ý khác rỗng. Tích Descartes của hai tập hợp A và B, kí hiệu là A × B, là một tập hợp gồm các phần tử (a, b) trong đó $a \in A$ và $b \in B$.

Tức là $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ và } b \in B \}$

Tương tự, ta có thể mở rộng định nghĩa tích Descartes của n tập hợp A_1, $A_2,..., A_n$, kí hiệu $A_1 \times .. \times A_n$ là tập hợp gồm các bộ sắp thứ tự n phần tử

$(a_1, a_2,..., a_n)$ với $a_i \in A_i$, $i = 1,...,n$

Tức là $A_1 \times ... \times A_n = \{ (a_1, a_2,..., a_n) \mid a_i \in A_i \}$

Kí hiệu $A_n = A \times ... \times A$ (n lần) gọi là luỹ thừa Descartes cấp n của tập hợp A ($n \geq 2$). Đặc biệt, nếu n = 2 thì $A_2 = A \times A$ gọi là bình phương Descartes của A.

Ví dụ 24

a. Cho A = {a, b, c } và B = {1, 2 }

$A \times B = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2) \}$

$B_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

b. Với mỗi điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy xác định một cặp số thực (x, y), x là hoành độ và y là tung độ của điểm đó. Ngược lại, mỗi một cặp số thực (x, y) xác định một điểm duy nhất của mặt phẳng tọa độ. Chính vì vậy ta có thể coi tập hợp điểm trên mặt phẳng biểu thị tập tích $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Với mỗi điểm trong không gian tọa độ Oxyz xác định một cặp số thực (x, y, z), x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của điểm đó. Ngược lại, mỗi một cặp số thực có tọa độ (x, y, z) xác định một điểm duy nhất của không gian Oxyz.

Chính vì vậy ta có thể coi tập hợp điểm trong không gian biểu thị tập tích

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}_3.$$

Chú ý Nói chung $A \times B \neq B \times A$ và $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

CÂU HỎI

1. Mô tả khái niệm tập hợp và cách xác định một tập hợp?
2. Định nghĩa khái niệm tập con, hai tập hợp bằng nhau?
3. Thế nào là phép hợp, phép giao, hiệu, tích Descartes của hai tập hợp. Chứng minh một số tính chất của phép toán tập hợp?
4. Tìm hiểu ứng dụng của lý thuyết tập hợp trong việc hình thành khái niệm số tự nhiên, các phép toán trên tập số tự nhiên trong môn toán ở tiểu học.

1.2. QUAN HỆ HAI NGÔI

1.2.1. Quan hệ hai ngôi

1.2.1.1. Ví dụ mở đầu

Cho tập tích Descartes $X \times Y$, mỗi tập con của tập $X \times Y$ có khả năng biểu thị một mối quan hệ nào đó giữa các phần tử của X với các phần tử của Y.

Ta xét ví dụ sau:

Cho $X = \{1, 2, 3\}$ và $Y = \{12, 15, 16, 18\}$.

Gọi S là tập các cặp sắp thứ tự (x, y), $x \in X$, $y \in Y$ trong đó x là ước của y.

Liệt kê phần tử ta có:

S = {(1,12), (1,15), (1,16), (1,18), (2,12), (2,16), (2,18), (3,12), (3,15), (3,18)}

Ta thấy S là tập con của tập tích Descartes X × Y, tập này hoàn toàn xác định quan hệ "x là ước của y" giữa các phần tử của tập X và phần tử của tập Y.

x là ước của y khi và chỉ khi (x, y)∈ S.

Ví dụ trên chứng tỏ rằng có thể dùng tập con của tập tích X × Y để biểu thị mỗi quan hệ giữa các phần tử của X và Y.

Nói chung vai trò của tập X và tập Y không giống nhau vì X × Y ≠ Y × X.

Trong trường hợp X = Y ta xét trường hợp sau:

Cho tập hợp X = {1, 2, 3} và các tập hợp:

S_1 = { (1,1), (2, 2), (3, 3)}

S_2 = { (1,2), (1, 3), (2, 3)}

S_3 = { (2,1), (3, 1), (3, 2)}

Ta thấy S_1 biểu thị mối quan hệ bằng nhau của các phần tử của X.

S_2 biểu thị mối quan hệ nhỏ hơn và S_3 biểu thị mối quan hệ lớn hơn trên X.

S_1, S_2, S_3 đều là những tập con của tập X_2.

Các tập này hoàn toàn xác định quan hệ "x = y", "x < y", "x > y" giữa các phần tử của tập X.

Ta đi đến định nghĩa sau:

1.2.1.2. Định nghĩa

Cho các X và Y là các tập không rỗng. Tập con S của tập tích Descartes X × Y gọi là một quan hệ hai ngôi giữa X và Y.

Nếu X = Y ta gọi S là quan hệ hai ngôi xác định trên tập X.

Nếu (x, y) ∈ S, ta kí hiệu x S y và đọc là "x có quan hệ S với y".

Ví dụ 1

a. Quan hệ "cùng tuổi" trên tập hợp X học sinh nào đó là quan hệ hai ngôi

b. Quan hệ "bằng nhau" trên tập số thực ℝ là quan hệ hai ngôi.

c. Quan hệ có cùng chữ số hàng đơn vị trên tập hợp ℕ các số tự nhiên được xác định bởi tập hợp:

S = {(a, b) ∈ $\mathbb{N}_2$ | a, b có cùng chữ số hàng đơn vị }

là quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}$

d. Quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathbb{N}$ được xác định bởi tập hợp

$S = \{(a, b) \mid a \leq b, a, b \in \mathbb{N}\}$ là quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}$

e. Quan hệ bao hàm "$\subset$" trên tập hợp các tập hợp con $\wp(X)$ của tập hợp X tuỳ ý là quan hệ hai ngôi

g. Trong tập các đường thẳng (D) trong mặt phẳng cho trước, quan hệ "vuông góc với nhau" xác định bởi:

$\forall d_1, d_2 \in D, d_1 S d_2 \Leftrightarrow d_1 \perp d_2$

là quan hệ hai ngôi.

Bây giờ chúng ta hãy xét các tính chất thường gặp của quan hệ hai ngôi.

1.2.1.3. Một số tính chất thường gặp của quan hệ hai ngôi

Định nghĩa

Quan hệ hai ngôi S trên tập X gọi là có tính chất:

1. phản xạ nếu với mọi $x \in X$, ta có $x S x$
2. đối xứng nếu với mọi $x, y \in X$, $x S y$ kéo theo $y S x$
3. phản đối xứng nếu với mọi $x, y \in X$, $x S y$ và $y S x$ kéo theo $x = y$
4. bắc cầu nếu với mọi $x, y, z \in X$, $x S y$ và $y S z$ kéo theo $x S z$

Ví dụ 2

a. Quan hệ "cùng tuổi" trên tập hợp X (là tập các học sinh nào đó) là quan hệ có các tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Thật vậy:

- Tính chất phản xạ: $\forall x \in X$, ta luôn có x cùng tuổi x;
- Tính chất đối xứng: $\forall x, y \in X$, từ x cùng tuổi y kéo theo y cùng tuổi x;
- Tính chất bắc cầu: $\forall x, y, z \in X$, từ x cùng tuổi y và y cùng tuổi z kéo theo x cùng tuổi z.

b. Quan hệ "bằng nhau" trên tập số thực $\mathbb{R}$ có tất cả các tính chất nói trên.

Thật vậy:

- Tính chất phản xạ: $\forall x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $x = x$

- Tính chất đối xứng: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, từ $x = y$ kéo theo $y = x$

- Tính chất phản đối xứng: hiển nhiên

- Tính chất bắc cầu: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, từ $x = y$ và $y = z$ kéo theo $x = z$

c. Quan hệ "có cùng chữ số hàng đơn vị" trên tập hợp $\mathbb{N}$ có các tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu và không có tính chất phản đối xứng.

Thật vậy:

- Có tính chất phản xạ:

$\forall x \in \mathbb{N}$, ta luôn có x có cùng chữ số hàng đơn vị với x.

- Có tính chất đối xứng:

$\forall x, y \in \mathbb{N}$, x có cùng chữ số hàng đơn vị với y $\Rightarrow$y có cùng chữ số hàng đơn vị với x.

- Không có tính chất phản đối xứng:

Với $x, y \in \mathbb{N}$, $x = 14$, $y = 24$, ta có 14 có cùng chữ số hàng đơn vị với 24 nhưng $14 \neq 24$.

- Có tính chất bắc cầu:

$\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, $xSy \Rightarrow$ x có cùng chữ số hàng đơn vị y (1)

và $ySz \Rightarrow$y có cùng chữ số hàng đơn vị z (2)

(1) và (2) $\Rightarrow$ x có cùng chữ số hàng đơn vị với $z \Rightarrow xSz$

d. Quan hệ hai ngôi $\leq$ trên tập hợp $\mathbb{N}$ có các tính chất: phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu;

e. Quan hệ bao hàm "$\subset$" trên tập hợp các tập hợp con P(X) của tập hợp X tuỳ ý có ba tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu;

g. Trong tập các đường thẳng (D) trong mặt phẳng cho trước, quan hệ "vuông góc với nhau" xác định bởi:

$$\forall d_1, d_2 \in D, d_1 S d_2 \Leftrightarrow d_1 \perp d_2$$

Quan hệ vuông góc trên tập các đường thẳng (D) chỉ có tính chất đối xứng, không có các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

1.2.2. Quan hệ tương đương

1.2.2.1. Quan hệ tương đương

Định nghĩa

Quan hệ hai ngôi S xác định trên tập hợp X gọi là quan hệ tương đương nếu có các tính chất sau đây:

1. Phản xạ $\forall x \in X, x\ S\ x$

2. Đối xứng $\forall x, y \in X, x\ S\ y \Rightarrow y\ S\ x$

3. Bắc cầu $\forall x, y, z \in X, x\ S\ y$ và $y\ S\ z \Rightarrow x\ S\ z$

Quan hệ tương đương thường kí hiệu là "~"

Ví dụ 3

a. Quan hệ "cùng tuổi" trên tập hợp X học sinh nào đó là quan hệ tương đương;

b. Quan hệ "bằng nhau" trên tập số thực $\mathbb{R}$ là quan hệ tương đương;

c. Quan hệ "có cùng chữ số hàng đơn vị" trên tập hợp $\mathbb{N}$ là quan hệ tương đương;

d. Trên tập $\mathbb{Z}$ và $p \in \mathbb{N}^*$ định nghĩa quan hệ hai ngôi:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a\ S\ b \Leftrightarrow a \equiv b \bmod p \Leftrightarrow a - b \vdots p$$

(cùng số dư trong phép chia cho p)

Quan hệ S là quan hệ tương đương trên tập $\mathbb{Z}$.

Thật vậy:

- S có tính chất phản xạ trên $\mathbb{Z}$:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a - a = 0 \text{ nên } a - a \vdots p \quad (p \neq 0, p \in \mathbb{N})$$

- S có tính chất đối xứng trên $\mathbb{Z}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}^*, aSb \Rightarrow a - b \vdots p \Rightarrow -(a - b) \vdots p \Rightarrow b - a \vdots p \Rightarrow bSa$$

- S có tính chất bắc cầu trên $\mathbb{Z}$:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}^*, \qquad aSb \Rightarrow a - b \vdots p \ (1)$$

$$bSc \Rightarrow b - c \vdots p \ (2)$$

Từ (1) và (2): a - b + b - c ⋮ p ⇒ a - c ⋮ p ⇒ aSc

1.2.2.2. Lớp tương đương và tập thương

Định nghĩa

Cho quan hệ tương đương ~ trên X và phần tử a ∈ X. Tập hợp

$\bar{a} = \{ x \in X | x \sim a\} = [a]$

gọi là lớp tương đương của phần tử a theo quan hệ ~.

Định lý 2.1

Cho quan hệ tương đương "~" trên tập hợp X. Quan hệ tương đương "~" chia tập X thành các tập con không rỗng, đôi một rời nhau sao cho mỗi phần tử của X đều thuộc và chỉ thuộc một trong các tập con ấy và các phần tử trong cùng một tập con thì tương đương với nhau.

Nghĩa là:

1. ∀ a ∈ X, [a] ≠ ∅;
2. ∀ a, b ∈ X, [a] = [b] ⇔ a ~ b;
3. ∀ a, b ∈ X, [a] = [b] hoặc [a] ∩ [b] = ∅.

Chứng minh

1. ∀a ∈ X, a ~ a. Do đó a ∈ [a], suy ra [a] ≠ ∅

2. Giả sử [a] = [b], do a ∈ [a] = [b] suy ra a ~ b

Ngược lại, giả sử a ~ b.

∀ x ∈ [a], x ~ a. Do tính bắc cầu x ~ b, vậy x ∈ [b]. Suy ra [a] ⊂ [b]

Tương tự [b] ⊂ [a]. Suy ra [a] = [b]

3. Giả sử [a] ∩ [b] ≠ ∅.

∃ c ∈ [a] ∩ [b], c ~ a và c ~ b suy ra a ~ c và c ~ b. Vậy [a] = [b].

Định nghĩa

Tập hợp các lớp tương đương xác định bởi quan hệ tương đương ~ gọi là tập thương của tập hợp X và kí hiệu là X/~.

Tức là $X/\sim = \{\bar{a} \mid a \in X\}$

Ví dụ 4

a. Ta đã biết quan hệ "cùng tuổi" là quan hệ tương đương trên tập X. Tập thương của tập X đối với quan hệ "cùng tuổi" là tập gồm các phần tử là tập các học sinh cùng độ tuổi của trường đó.

b. Quan hệ "cùng chữ số hàng đơn vị" trên ℕ là quan hệ tương đương. Quan hệ này có các lớp tương đương sau:

$\bar{0}$ = { x ∈ ℕ| x có chữ số hàng đơn vị là 0}

$\bar{1}$ = { x ∈ ℕ| x có chữ số hàng đơn vị là 1}

……

$\bar{9}$ = { x ∈ ℕ| x có chữ số hàng đơn vị là 9}

và tập thương ℕ/ "cùng chữ số hàng đơn vị" = { $\bar{0}$, $\bar{1}$,..., $\bar{9}$ }

c. Quan hệ "đồng dư theo modun 3" là quan hệ tương đương.

Quan hệ này có các lớp tương đương: $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$.

Tập thương của tập số nguyên ℤ đối với quan hệ "đồng dư theo modun 3" là tập gồm 3 phần tử $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$. Tức là ℤ / "đồng dư theo modun 3" = { $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ }

Qua các ví dụ trên ta có nhận xét rằng: Xuất phát từ một tập hợp đã cho và một quan hệ tương đương trên tập ấy ta xây dựng được một tập hợp mới mà các phần tử là các lớp tương đương.

1.2.3. Quan hệ thứ tự

1.2.3.1. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa

Quan hệ hai ngôi S trên tập hợp X gọi là quan hệ thứ tự nếu có các tính chất

1. Phản xạ $\forall x \in X, x \mathrel{S} x$
2. Phản đối xứng $\forall x, y \in X, x \mathrel{S} y$ và $y \mathrel{S} x \Rightarrow x = y$
3. Bắc cầu $\forall x, y, z \in X, x \mathrel{S} y$ và $y \mathrel{S} z \Rightarrow x \mathrel{S} z$.

Ví dụ 5

a. Quan hệ "≤" trên tập ℕ, ℤ, ℚ, ℝ là một quan hệ thứ tự.

b. Trên tập $\mathbb{N}^*$ định nghĩa quan hệ chia hết

$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \ a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}, b = aq$

là quan hệ thứ tự.

Chú ý:

- Quan hệ chia hết là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^*$ nhưng không phải là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$ (vì không có tính chất phản xạ, 0 không thể là ước của 0), không phải là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}$.

- Quan hệ bao hàm "$\subset$" là quan hệ thứ tự trên tập hợp P(X)

(Dựa vào tính chất của quan hệ bao hàm).

- Quan hệ $\leq$ (nhỏ hơn hay bằng) thông thường trong các tập hợp số là quan hệ thứ tự.

Đây là một quan hệ thứ tự điển hình đến nỗi người ta mượn kí hiệu "$\leq$" để chỉ thứ tự ngay cả trong trường hợp tổng quát. Trong trường hợp tổng quát $x \leq y$ không nhất thiết mang ý nghĩa thông thường. Vì vậy, quan hệ thứ tự thường kí hiệu là "$\leq$" (đọc là "nhỏ hơn hoặc bằng").

Để tránh nhầm lẫn, khi nào quan hệ "$\leq$" mang ý nghĩa thông thường thì ta sẽ nói rõ.

$\forall x, y \in X$, kí hiệu

$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$ và đọc là "y lớn hơn hoặc bằng x"

$x < y \Leftrightarrow x \leq y$ và $x \neq y$ và đọc là "x nhỏ hơn y", "x đứng trước y" hay "x thực sự nhỏ hơn y"

Nếu có $x < y$ ta còn có $y > x$ và đọc là "y lớn hơn x"

Chú ý rằng quan hệ "<" không phải là quan hệ thứ tự.

1.2.3.2. Quan hệ thứ tự toàn phần

Tập hợp X trên đó có xác định một quan hệ thứ tự gọi là tập sắp thứ tự (theo quan hệ thứ tự đó).

Trong một tập sắp thứ tự có thể xảy ra hai trường hợp:

1. Mọi cặp phần tử x, y của X đều nằm trong quan hệ thứ tự đó. Nói khác đi,

$\forall x, y \in X$ ta nhất thiết có hoặc $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

2. Không phải mọi cặp của X đều có thể so sánh được nghĩa là có cặp x, y sao cho ta không có cả $x \leq y$ lẫn $y \leq x$.

Định nghĩa

Quan hệ thứ tự "≤" trên tập hợp X gọi là quan hệ thứ tự toàn phần nếu mọi phần tử của tập hợp X đều so sánh được với nhau. Tức là $\forall$ x, y $\in$ X, x ≤ y hoặc y ≤ x.

Khi đó tập X gọi là tập sắp thứ tự toàn phần.

Trường hợp trái lại, tập X gọi là tập sắp thứ tự bộ phận.

Ví dụ 6

a. Quan hệ "≤" trên tập $\mathbb{N}$ là quan hệ thứ tự toàn phần vì $\forall$ a, b $\in$ $\mathbb{N}$ thì hoặc a ≤ b hoặc b ≤ a.

b. Quan hệ chia hết "\" trên tập $\mathbb{N}^*$ là quan hệ thứ tự bộ phận vì hai phần tử bất kỳ không thể so sánh được.

Chẳng hạn: 3 không phải là ước của 4 và 4 cũng không phải là ước của 3.

c. Quan hệ bao hàm "⊂" trên tập P(X) là quan hệ thứ tự bộ phận vì hai tập con A, B bất kỳ của X thì A $\not\subset$ B và B $\not\subset$ A.

Tuy nhiên với X = $\varnothing$ hoặc X là đơn tử thì P(X) với quan hệ "⊂" là quan hệ thứ tự toàn phần (dành cho bạn đọc).

1.2.3.3. Các phần tử đặc biệt

Định nghĩa **(Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất)**

Cho (X, ≤) là tập sắp thứ tự.

1. Phần tử a $\in$ X gọi là phần tử lớn nhất (phần tử nhỏ nhất) của tập hợp X nếu:

$\forall$ x $\in$ X, x ≤ a (a ≤ x)

2. Tập X gọi là tập sắp tốt nếu mọi tập con không rỗng của nó đều có phần tử nhỏ nhất.

Chú ý: Tập X không có quá một phần tử lớn nhất(nhỏ nhất)

Ví dụ 7

a. Trong tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{N}$ với quan hệ "≤", phần tử 0 là phần tử nhỏ nhất, không có phần tử lớn nhất.

Tuy nhiên trong tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{Z}$ với quan hệ "≤", không có phần tử nhỏ nhất và không có phần tử lớn nhất

b. Xét tập sắp thứ tự $\mathbb{N}^*$ với quan hệ "chia hết" phần tử 1 là phần tử nhỏ nhất, không có phần tử lớn nhất.

c. Cho A = {2, 3, 5, 6} và B = {2, 4, 6} là các tập con của tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết.

Tập A không có phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất.

Tập B không có phần tử lớn nhất, có phần tử nhỏ nhất là 2.

d. Trong tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{N}$ với quan hệ "$\leq$" là một tập sắp thứ tự tốt.

Tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ với quan hệ "$\leq$" không phải là tập sắp thứ tự tốt vì không có phần tử nhỏ nhất.

e. Tập sắp thứ tự $\mathbb{N}^*$ với quan hệ chia hết "\" không phải là tập sắp thứ tự tốt vì không có phần tử nhỏ nhất.

Chẳng hạn, tập con {2, 3, 5, 7 }không có phần tử nhỏ nhất.

g. Với tập hợp X tùy ý, tập hợp các tập con P(X) của X với quan hệ thứ tự "$\subset$" X là phần tử lớn nhất, $\varnothing$ là phần tử nhỏ nhất.

Định nghĩa **(Cận trên, cận dưới, cận trên đúng, cận dưới đúng)**

Cho (X, $\leq$) là tập sắp thứ tự và A là tập con khác rỗng của tập X

1. Phần tử $x \in X$ gọi là cận trên (cận dưới) của tập A nếu $\forall a \in A$, $a \leq x$ ($x \leq a$)

2. Cận trên bé nhất của tập A, kí hiệu SupA gọi là cận trên đúng. Cận dưới lớn nhất, kí hiệu InfA gọi là cận dưới đúng.

Chú ý:

- Mọi bộ phận A của tập sắp thứ tự X có thể không có chặn trên (chặn dưới) nhưng cũng có thể có nhiều chặn trên (chặn dưới)

- Phần tử $x \in X$ là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của A khi và chỉ khi x là chặn trên (chặn dưới) của A.

- Mỗi bộ phận A của X nếu có chặn trên đúng(chặn dưới đúng) thì nó là duy nhất.

Ví dụ 8

a. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$ mọi $x \geq 2$ đều là cận trên, mọi $x \leq 1$ đều là cận dưới của A.

Tập A có cận trên đúng supA = 2 $\notin$ A và cận dưới đúng infA =1 $\in$A.

b. Cho A = {2, 3, 5, 6} và B = {2, 4, 6} là các tập con của tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết.

Tập A không có cận dưới, cận trên đúng supA= 30 và các số có dạng n = 30k, k $\in \mathbb{N}^*$ đều là các cận trên của A.

Tập B có phần tử nhỏ nhất là 2, không có phần tử lớn nhất.

c. Với tập hợp X tùy ý, tập hợp các tập con $\wp(X)$ của X với quan hệ thứ tự "$\subset$". Với mọi A, B $\in$ P(X): Gọi M = { A, B}

Sup(M) = A $\cup$ B Inf (M) = A $\cap$ B

Định nghĩa (**Phần tử tối đại, phần tử tối tiểu**)

Cho (X, $\leq$) là tập sắp thứ tự và A là tập con khác rỗng của tập X

Phần tử a $\in$ A gọi là phần tử tối đại (phần tử tối tiểu) của tập hợp A nếu

$\forall$ x $\in$ A, a $\leq$ x kéo theo a = x (x $\leq$ a kéo theo x = a)

Chú ý

- Nếu phần tử a là phần tử tối đại (tối tiểu) của X mà a $\in$ A thì a cũng là phần tử tối đại (tối tiểu) của A. Nhưng điều ngược lại không đúng.

- Tập A có thể có nhiều hoặc không có phần tử tối đại (tối tiểu).

Định lý 2.2

Nếu A là tập con khác rỗng của tập sắp thứ tự X có phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) a thì a là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất của A.

Chứng minh

Thật vậy:

Giả sử a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của A. Khi đó, $\forall$x $\in$ A, x $\leq$ a (a$\leq$ x)

Với $\forall$x $\in$ A, giả sử a$\leq$ x (x $\leq$ a) vì có x $\leq$ a (a$\leq$ x) nên x = a.

Vậy a là phần tử tối đại (tối tiểu) của A.

Giả sử A có 2 phần tử tối đại (tối tiểu) là a và a'. Khi đó do a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) nên a' $\leq$ a (a$\leq$ a'). Mặt khác do a' là phần tử tối đại của A nên từ a' $\leq$ a (a $\leq$ a') kéo theo a = a'.

Vậy a là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất.

Định lý 2.3

A là tập con khác rỗng của tập sắp thứ tự toàn phần X có phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) a khi và chỉ khi a là phần tử tối đại (tối tiểu) của A.

Chứng minh

Thật vậy:

Theo định lý 2.2 nếu a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) thì a là phần tử tối đai (tối tiểu)

Ta chứng minh mệnh đề đảo:

Giả sử, $a \in A$ là phần tử tối đại (tối tiểu) của A. Vì X là tập sắp thứ tự toàn phần nên A cũng là tập sắp thứ tự toàn phần.

$\forall x \in A$, giả sử $a < x$ ($x < a$) . Khi đó, với $a \leq x$ ($x \leq a$) ta suy ra $x = a$. Mâu thuẫn với $a < x$ ($x < a$).

Vậy $x \leq a$ ($a \leq x$).

Nghĩa là a là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất).

Ví dụ 9

a. Trong tập hợp sắp thứ tự $\mathbb{N}$ với quan hệ $\leq$, phần tử 0 là phần tử tối tiểu duy nhất, không có phần tử tối đại.

b. Xét tập sắp thứ tự $\mathbb{N}^*$ với quan hệ "chia hết" phần tử 1 phần tử tối tiểu duy nhất, không có phần tử tối đại.

Cho A = {2, 3, 5, 6} và B = {2, 4, 6} là các tập con của tập hợp $\mathbb{N}^*$ với quan hệ thứ tự là quan hệ chia hết.

Tập A có các phần tử tối đại là 5 và 6, các phần tử tối tiểu là 2, 3 và 5.

Tập B có phần tử tối tiểu là 2, các phần tử tối đại là 4 và 6.

c. Với tập hợp X tùy ý, tập hợp các tập con $\wp(X)$ của X với quan hệ thứ tự "$\subset$" X là phần tử tối đại, $\varnothing$ là phần tử tối tiểu.

CÂU HỎI

1. Cho các ví dụ về quan hệ hai ngôi giữa hai tập hợp, quan hệ hai ngôi xác định trên một tập hợp?

2. Định nghĩa quan hệ tương đương, lớp tương đương, tập thương?

3. Định nghĩa quan hệ thứ tự, tập sắp thứ tự, tập sắp toàn phần, tập sắp tốt?

4. Các phần tử đặc biệt đối với tập sắp thứ tự, đối với tập con của tập sắp thứ tự?

5. Tìm hiểu các quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự trong môn toán ở tiểu học. Cho ví dụ minh họa.

1.3. ÁNH XẠ

1.3.1. Khái niệm ánh xạ - Thu hẹp và mở rộng ánh xạ

1.3.1.1. Khái niệm ánh xạ

Trong bài trước, ta đã thấy mỗi tập con của tập tích Descartes biểu thị một quan hệ giữa các phần tử của tập X với các phần tử của tập Y. Trong các quan hệ đó, ta đã xét trường hợp riêng khi tập Y trùng với X và đi tới khái niệm quan hệ hai ngôi trên X.

Trong phần này, ta sẽ xét một trường hợp riêng khác của khái niệm quan hệ để đi tới khái niệm ánh xạ và các loại ánh xạ đặc biệt.

Giả sử cho quan hệ f trên $X \times Y$.

Trong trường hợp tổng quát, nói chung với mỗi $x \in X$, các phần tử $y \in Y$ có quan hệ f với x (tức là tập hợp $\{y \in Y \mid x\ f\ y\}$) có thể có một hay có nhiều phần tử và cũng có thể là rỗng.

Trong trường hợp đặc biệt khi mà ứng với mọi phần tử $x \in X$, có một và chỉ có một phần tử $y \in Y$ mà x f y thì quan hệ f được gọi là một ánh xạ từ X đến Y.

Như vậy ánh xạ từ X đến Y là một quan hệ f trên $X \times Y$ có tính chất "với mọi phần tử $x \in X$ bao giờ cũng có và chỉ có một phần tử $y \in Y$ sao cho x có quan hệ f với y".

Nói khác đi, việc cho một ánh xạ từ X đến Y là việc cho một quy tắc ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất y trong Y.

Ta đi đến phát biểu định nghĩa ánh xạ như sau:

Định nghĩa

Cho X và Y là hai tập không rỗng. Một ánh xạ f từ tập X vào tập Y là một quan hệ hai ngôi giữa tập X và tập Y có tính chất:

Với mỗi phần tử $x \in X$ có đúng một phần tử $y \in Y$ sao cho xf y.

Tập X gọi là tập nguồn hay tập xác định, tập Y là tập đích hay tập giá trị của ánh xạ f.

Phần tử y gọi là ảnh của phần tử x qua ánh xạ f hay là giá trị của ánh xạ f tại x.

Kí hiệu ánh xạ $f: X \to Y, x \mapsto y = f(x)$

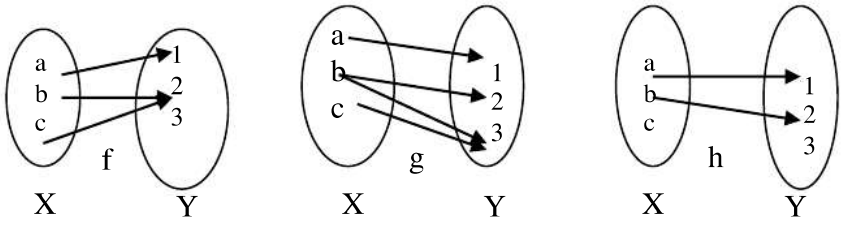
Ví dụ 1

a. Cho tập X = {a, b, c} và Y = {1, 2, 3}.

Quan hệ f = {(a, 1), (b, 2), (c, 2)} là ánh xạ vì:

Mọi phần tử của X đều có ảnh và ảnh đó là duy nhất.

Các quan hệ g = {(a ; 1), (b ; 2), (b ; 3), (c ; 3)} và h = {(a, 1), (b, 2)} không phải là ánh xạ vì trong quan hệ g tuy mọi phần tử đều có ảnh nhưng b có hai ảnh, trong quan hệ h phần tử c không có ảnh.



b. Cho X là tập các bài thi của học sinh thuộc lớp nào đó. Việc chấm bài thi là thực hiện một ánh xạ từ tập X đến tập thang điểm.

c. Phép cộng, phép nhân trên tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ (hoặc $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) là một ánh xạ từ tập $\mathbb{N}$ đến chính nó.

Phép trừ không phải là ánh xạ trên tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ vì không phải lúc nào ta cũng thực hiện được phép trừ với hai số tự nhiên bất kì để có kết quả là số tự nhiên.

Chẳng hạn $1, 5 \in \mathbb{N}$ nhưng $1 - 5 \notin \mathbb{N}$.

d. Hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = 2x + 1$ là một ánh xạ.

Thật vậy:

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = f(x) = 2x + 1 \in \mathbb{R}$.
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \ f(x_1) = 2x_1 + 1$

$$f(x_2) = 2x_2 + 1$$

Nếu $x_1 = x_2$ thì $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$. Do vậy $f(x_1) = f(x_2)$

e. Quan hệ hai ngôi $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ là một ánh xạ từ X vào X, gọi là ánh xạ đồng nhất và kí hiệu là id_x

g. Cho các tập hợp X = {xanh, vàng, tím, nâu} và Y = {a, b, c, d}. Bảng $\begin{pmatrix} \text{xanh} & \text{vàng} & \text{tím} & \text{nâu} \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ xác định một ánh xạ f: X → Y.

1.3.1.2. Ánh xạ bằng nhau

Định nghĩa

Hai ánh xạ f: X → Y và g: X → Y gọi là bằng nhau và kí hiệu là f = g nếu với mọi x ∈X, ta có f(x) = g(x).

Ví dụ 2

a. Cho ánh xạ f, g xác định như sau:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = x^2 - 1$ và g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = (x - 1)(x + 1)$

Hai ánh xạ f, g là bằng nhau;

b. Cho hai ánh xạ h, k

h: $\mathbb{R} \to [-1; 1]$, $x \mapsto y = h(x) = \sin x$ và k: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto y = k(x) = \cos x$

h, k là hai ánh xạ không bằng nhau;

c. Cho các tập hợp X = {xanh, vàng, tím, nâu} và Y = {a, b, c, d};

Bảng $\begin{pmatrix} \text{xanh} & \text{vàng} & \text{tím} & \text{nâu} \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ xác định một ánh xạ f: X → Y

Bảng $\begin{pmatrix} \text{xanh} & \text{vàng} & \text{tím} & \text{nâu} \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$ xác định một ánh xạ g: X → Y.

Hai ánh xạ này không bằng nhau vì f(vàng) ≠ g(vàng) hay f(tím) ≠ g(tím).

1.3.1.3. Thu hẹp và mở rộng ánh xạ

Định nghĩa

Cho ánh xạ f: X → Y và tập con A ⊂ X. Ánh xạ g: A → Y, x ↦ f(x)

gọi là thu hẹp của ánh xạ f lên tập A và kí hiệu là $g = f|_A$. Ánh xạ f gọi là mở rộng của ánh xạ g lên tập X.

Chú ý

Với mỗi ánh xạ f: $X \to Y$ và một tập con $A \subset X$ có đúng một thu hẹp $g = f|_A$.

Tuy nhiên, với mỗi ánh xạ g: $A \to Y$, $A \subset X$ có thể mở rộng lên tập X theo nhiều cách khác nhau.

Ví dụ 3

a. Cho ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. Ánh xạ g: $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ là thu hẹp của ánh xạ f lên một khoảng chu kỳ.

b. Cho X = {xanh, vàng, tím, nâu}, Y = {a, b, c }, A = {xanh, vàng, tím}

và ánh xạ g: $A \to Y$ xác định bởi

$$g = \begin{pmatrix} \text{xanh} & \text{vàng} & \text{tím} \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Các ánh xạ sau đây đều là mở rộng của g lên tập hợp X.

$$f_1 = \begin{pmatrix} \text{xanh} & \text{vàng} & \text{tím} & \text{nâu} \\ a & b & c & a \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} \text{xanh} & \text{vàng} & \text{tím} & \text{nâu} \\ a & b & c & b \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} \text{xanh} & \text{vàng} & \text{tím} & \text{nâu} \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$$

1.3.1.4. Đồ thị của ánh xạ

Định nghĩa

Cho ánh xạ f: $X \to Y$, ta gọi tập $G = \{ (x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ là đồ thị của ánh xạ f.

Chú ý: Có thể đồng nhất ánh xạ f: $X \to Y$ với đồ thị f của nó vì mỗi $x \in X$ có một cặp duy nhất $(x, f(x)) \in G$ và ngược lại.

Ví dụ 4

Trong ví dụ 1.d đồ thị của ánh xạ f là tập $G = \{ (x, y)) \in \mathbb{R}_2 \mid y = 2x + 1\}$

Đồ thị là đường thẳng có phương trình y = 2x + 1

1.3.2. Các loại ánh xạ đặc biệt

1.3.2.1. Ảnh và tạo ảnh

Định nghĩa

Cho ánh xạ f: X → Y và các tập con A ⊂ X và B ⊂ Y.

1. Tập hợp f(A) = {f(x) | x ∈ A} gọi là ảnh của tập A qua ánh xạ f.

2. Tập hợp $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ gọi là tạo ảnh của tập B qua ánh xạ f.

Đặc biệt

f(X) = Imf gọi là ảnh của ánh xạ f

$\forall b \in Y, f^{-1}(b) = \{x \in X \mid f(x) = b\}$ gọi là tạo ảnh của b qua ánh xạ f

Ví dụ 4

a. Cho các tập hợp X = {1, 2, 3, 4}, Y = {a, b, c, d}, A = {1, 2, 3}, B = {a, b} và ánh xạ f: X → Y xác định bởi: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & b & c \end{pmatrix}$.

Ta có f(A) = {a, b} = B, Imf = { a, b, c } ⊂ Y, $f^{-1}(B) = \{1, 2, 3\} = A$

$f^{-1}(a) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(b) = \{ 3 \}$, $f^{-1}(c) = \{4\}$, $f^{-1}(d) = \varnothing$

b. Cho ánh xạ f : ℝ → ℝ

x ↦ y = f(x) = 2 – 3x

i) Tìm ảnh f(2), f(-4) và tạo ảnh của phần tử: $f^{-1}(2)$; $f^{-1}(-4)$.

ii) Xác định tạo ảnh của tập hợp B: $f^{-1}(B)$, với B = {-2, 1}.

Ta có :

i) Ảnh của phần tử:

Với x = 2 thì f(2) = 2 – 3.2 = -4

Với x = -4 thì f(-4) = 2 – 3.(-4) = 14

Tạo ảnh của phần tử :

Với y = 2 thì 2 – 3x = 2 ⇔ x = 0 nên $f^{-1}(2) = \{0\}$

Với y = -4 thì 2 – 3x = -4 ⇔ x = 2 nên $f^{-1}(-4) = \{2\}$.

ii) Tạo ảnh của tập con:

Tương tự với B = {-2, 1}, thì $f^{-1}(B) = \{-1, 1\}$.

c. Cho ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2 + 1$

Tập A = [–1; 1] ⊂ ℝ, f(A) = [1; 2] và $f^{-1}(A) = \{0\}$.

Định lý 2.4

Cho ánh xạ f: X → Y và các tập con A ⊂ X, B ⊂ X, C ⊂ Y, D ⊂ Y

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ 4. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

Chứng minh

1. $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow y = f(x), x \in A \cup B$

$\Leftrightarrow y \in f(A)$ hoặc $y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

Suy ra $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. $y \in f(A \cap B) \Rightarrow y = f(x), x \in A$ và $x \in B \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$

Tuy nhiên, xét $y = f(a) = f(b) \in f(A) \cap f(B)$ với $a \in A \setminus B, b \in B \setminus A$.

Rõ ràng $y \notin f(A \cap B)$.

Vậy $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. và 5. Chứng minh tương tự

1.3.2.2. Các loại ánh xạ đặc biệt

Định nghĩa

Ánh xạ f: X → Y gọi là

1. đơn ánh nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ kéo theo $f(x_1) \neq f(x_2)$;
2. toàn ánh nếu với mọi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$;
3. song ánh nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Ví dụ 5

a. Ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = 2x + 1$ là một song ánh;

Thật vậy :

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = 2x_1 + 1$, $f(x_2) = 2x_2 + 1$

$f(x_1) = f(x_2)$ thì $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, vì vậy $x_1 = x_2$.

Nên f là đơn ánh.

- $\forall y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) = 2x + 1$, luôn $\exists x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$ để $f(x) = y$.

Vậy nên f là toàn ánh.

f vừa đơn ánh và toàn ánh nên f là song ánh.

b. Việc chấm bài thi trong VD 1.b không phải là song ánh vì:

- Hai bài thi khác nhau có thể có cùng một điểm số
- Có thể có những điểm số mà không có bài thi nào có điểm số đó;

c. Ánh xạ đồng nhất $Id_X: X \to X, x \mapsto x$ là song ánh;

d. Ánh xạ trong ví dụ 1.g là song ánh;

e. Ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto y = x_2 + 1$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh, không là song ánh.

g. Ánh xạ $f: [0, \pi] \to [0,1], x \mapsto y = \sin x$ là toàn ánh, không là đơn ánh, song ánh.

Định lý 2.5 Ánh xạ $f: X \to Y$ là

1. đơn ánh nếu và chỉ nếu với mọi $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ có không nhiều hơn một phần tử
2. toàn ánh nếu và chỉ nếu với mọi $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ có không ít hơn một phần tử
3. song ánh nếu và chỉ nếu với mọi $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ có đúng một phần tử

Chứng minh

1. $\forall a, b \in f^{-1}(y)$, $f(a) = f(b)$.

Do f đơn ánh nên $a = b$.

Vậy $f^{-1}(y)$ có ít hơn một phần tử.

Ngược lại, $\forall a, b \in X$, $f(a) = f(b) = y$ suy ra $a, b \in f^{-1}(y)$.

Do tập $f^{-1}(y)$ có ít hơn một phần tử nên $a = b$.

Vậy f là đơn ánh

2. và 3. Chứng minh tương tự.

1.3.3. Ánh xạ tích - Ánh xạ ngược

1.3.3.1 Ánh xạ tích

Định nghĩa

Cho hai ánh xạ f: $X \to Y$, $x \mapsto y = f(x)$ và g: $Y \to Z$, $y \mapsto z = g(y)$.

Ánh xạ h: $X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$ gọi là ánh xạ tích (ánh xạ hợp thành) của f và g, kí hiệu là $h = g \circ f$

Ví dụ 6

Cho ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 2x + 1$ và ánh xạ g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \sin x$

Ta có $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin(2x + 1)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2\sin x + 1$

Như vậy, tích ánh xạ không có tính chất giao hoán $g \circ f \neq f \circ g$

Định lý 2.6 Tích ánh xạ có tính chất kết hợp

Chứng minh

Cho các ánh xạ f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ và h: $Z \to T$

$\forall x \in X$, $[h \circ (g \circ f)](x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)[f(x)] = [(h \circ g) \circ f](x)$

Tức là $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Định lý 2.7 Cho các ánh xạ f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ và $h = g \circ f$

1. Nếu f và g là đơn ánh (toàn ánh) thì h là đơn ánh (toàn ánh)
2. Nếu h là đơn ánh (toàn ánh) thì f là đơn ánh (toàn ánh)
3. Nếu h là đơn ánh (toàn ánh) và f toàn ánh (g đơn ánh) thì g đơn ánh (f toàn ánh)

Chứng minh

1. Cho f và g là các đơn ánh

$\forall a, b \in X$, $h(a) = h(b) \Rightarrow g[f(a)] = g[f(b)] \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

Vậy h là đơn ánh.

Cho f và g là toàn ánh

$\forall z \in Z, \exists y \in Y: z = g(y)$ và $\forall y \in Y, \exists x$ sao cho $y = f(x)$

suy ra $\exists x \in X$ sao cho $h(x) = z$

Vậy h là toàn ánh.

2. 3. Chứng minh tương tự.

1.3.3.2 Ánh xạ ngược

Định nghĩa

Ánh xạ f: X → Y gọi là khả nghịch nếu có ánh xạ g: Y → X sao cho

$g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$

Khi đó ánh xạ g gọi là ánh xạ ngược của f và kí hiệu là $g = f^{-1}$.

Nếu g là ánh xạ ngược của f thì f là ánh xạ ngược của g.

Ví dụ 7

Cho hai ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2x + 1$

và $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \frac{x-1}{2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x = Id_{\mathbb{R}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2.\frac{x-1}{2} + 1 = x = Id_{\mathbb{R}}$$

Vậy g là ánh xạ ngược của f và f là ánh xạ ngược của g.

Định lý 2.8

Ánh xạ f: X →Y là ánh xạ khả nghịch nếu và chỉ nếu ánh xạ f là song ánh

Chứng minh

Giả sử ánh xạ f có ánh xạ ngược là g: Y → X.

Ta có $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$ (1)

Do Id_X song ánh nên từ (1) và định lý 1.7 suy ra f là song ánh

Ngược lại, giả sử f là song ánh.

Khi đó ∀ y ∈ Y, tập $f^{-1}(y)$ có đúng một phần tử.

Lập ánh xạ g: Y → X với $y \mapsto f^{-1}(y)$. Rõ ràng ánh xạ g thoả mãn (1)

Suy ra ánh xạ f là khả nghịch và g là ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Định lý 2.9 Ánh xạ ngược của ánh xạ f, nếu tồn tại, là duy nhất

Chứng minh

Giả sử ánh xạ f: X → Y có hai ánh xạ ngược là g: Y → X và g': Y → X

Theo định nghĩa $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g' = Id_Y$

Từ đó suy ra $g = g \circ Id_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = Id_X \circ g' = g'$

CÂU HỎI

1. Định nghĩa ánh xạ, ánh xạ bằng nhau, thu hẹp và mở rộng ánh xạ?
2. Định nghĩa đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Tích ánh xạ và ánh xạ ngược?
3. Chứng minh một số tính chất của ánh xạ?

1.4. Giải tích tổ hợp

1.4.1. Quy tắc cộng – Quy tắc nhân

Định nghĩa **(Quy tắc cộng)** Nếu một công việc nào đó có thể thực hiện theo k phương án khác nhau, trong đó: phương án 1 có n_1 cách chọn, phương án 2 có n_2 cách chọn,…, phương án k có n_k cách chọn và mỗi cách chọn chỉ thuộc đúng 1 phương án. Khi đó, có $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Định nghĩa **(Quy tắc nhân)**

Nếu một công việc nào đó phải hoàn thành qua k giai đoạn liên tiếp, trong đó: giai đoạn 1 có n_1 cách chọn, giai đoạn 2 có n_2 cách chọn,…, giai đoạn k có n_k cách chọn. Khi đó, có $n_1 . n_2 ... n_k$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Nhận xét: Từ định nghĩa của quy tắc cộng và quy tắc nhân trên, ta thấy rằng:

- Nếu bỏ 1 giai đoạn nào đó mà ta không thể hoàn thành được công việc (không có kết quả) thì lúc đó ta cần phải sử dụng quy tắc nhân.
- Nếu bỏ 1 giai đoạn nào đó mà ta vẫn có thể hoàn thành được công việc (có kết quả) thì lúc đó ta sử dụng quy tắc cộng.

Ví dụ 1 Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lập được bao nhiêu số tự nhiên trong mỗi trường hợp sau:

a. Số tự nhiên chẵn có 4 chữ số.

b. Số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau.

Ta có:

a. Gọi số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcd}$

Cách 1: Chọn chữ số d có 3 cách chọn,

Chọn chữ số a có 5 cách chọn,

Chọn chữ số b có 6 cách chọn,

Chọn chữ số c có 6 cách chọn

Theo quy tắc nhân có số các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số là: 3.5.6.6 = 540 (số).

Cách 2: - Các số có dạng $\overline{abcd}$ kể cả a = 0:

Chọn chữ số d có 3 cách chọn,

Chọn chữ số a có 6 cách chọn,

Chọn chữ số b có 6 cách chọn,

Chọn chữ số c có 6 cách chọn

Theo quy tắc nhân có: 3.6.6.6 = 648 (số).

- Các số có dạng $\overline{abcd}$ với a = 0:

Chọn chữ số a có 1 cách chọn,

Chọn chữ số d có 3 cách chọn,

Chọn chữ số b có 6 cách chọn,

Chọn chữ số c có 6 cách chọn

Theo quy tắc nhân có: 1.3.6.6 = 108 (số).

Vậy số các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số là có 648 – 108 = 540 (số).

Cách 3: - Các số có dạng $\overline{abcd}$ với d = 0:

Chọn chữ số d có 1 cách chọn,

Chọn chữ số a có 5 cách chọn,

Chọn chữ số b có 6 cách chọn,

Chọn chữ số c có 6 cách chọn

Theo quy tắc nhân có: 1.5.6.6 = 180 (số).

- Các số có dạng $\overline{abcd}$ với d ≠ 0:

Chọn chữ số d có 2 cách chọn,

Chọn chữ số a có 5 cách chọn,

Chọn chữ số b có 6 cách chọn,

Chọn chữ số c có 6 cách chọn

Theo quy tắc nhân có: 2.5.6.6 = 360 (số).

Vậy theo quy tắc cộng ta có số các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số là 180 + 360 = 540 (số).

b. Gọi số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abcd}$

Cách 1: - Các số có dạng $\overline{abcd}$ kể cả a = 0:

Chọn chữ số d có 3 cách chọn,

Chọn chữ số a có 5 cách chọn,

Chọn chữ số b có 4 cách chọn,

Chọn chữ số c có 3 cách chọn

Theo quy tắc nhân có: 3.5.4.3 = 180 (số).

- Các số có dạng $\overline{abcd}$ với a = 0:

Chọn chữ số a có 1 cách chọn,

Chọn chữ số d có 2 cách chọn,

Chọn chữ số b có 4 cách chọn,

Chọn chữ số c có 3 cách chọn

Theo quy tắc nhân có: 1.2.4.3 = 24 (số).

Vậy số các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau là 180 – 24 = 156 (số).

Cách 2: - Các số có dạng $\overline{abcd}$ với d = 0:

Chọn chữ số d có 1 cách chọn,

Chọn chữ số a có 5 cách chọn,

Chọn chữ số b có 4 cách chọn,

Chọn chữ số c có 3 cách chọn

Theo quy tắc nhân có: 1.5.4.3 = 60 (số).

- Các số có dạng $\overline{abcd}$ với d ≠ 0:

Chọn chữ số d có 2 cách chọn,

Chọn chữ số a có 4 cách chọn,

Chọn chữ số b có 4 cách chọn,

Chọn chữ số c có 3 cách chọn

Theo quy tắc nhân có: 2.4.4.3 = 96 (số).

Vậy số các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau là 60 + 96 = 156 (số).

Ví dụ 2 Bạn An có 5 bông hoa hồng khác nhau, 4 bông hoa cúc khác nhau, 3 bông hoa lan khác nhau, bạn cần chọn ra 4 bông để cắm vào một lọ hoa, hỏi bạn có bao nhiêu cách chọn hoa để cắm sao cho hoa trong lọ phải có đủ cả loại.

Bài toán xảy ra 3 trường hợp.

- Trường hợp 1: Chọn 2 bông hồng, 1 bông cúc, 1 bông lan.

Chọn 1 bông hồng thứ nhất có 5 cách

Chọn 1 bông hồng thứ hai có 4 cách

Chọn 1 bông cúc có 4 cách

Chọn 1 bông lan có 3 cách

Theo quy tắc nhân, ta có 5.4.4.3 = 240 cách (1)

- Trường hợp 2: Chọn 1 bông hồng, 2 bông cúc, 1 bông lan.

Chọn 1 bông hồng có 5 cách

Chọn 1 bông cúc thứ nhất có 4 cách

Chọn 1 bông cúc thứ hai có 3 cách

Chọn 1 bông lan có 3 cách

Theo quy tắc nhân, ta có 5.4.3.3 = 180 cách (2)

- Trường hợp 3: Chọn 1 bông hồng, 1 bông cúc, 2 bông lan.

Chọn 1 bông hồng có 5 cách

Chọn 1 bông cúc có 4 cách

Chọn 1 bông lan thứ nhất có 3 cách

Chọn 1 bông lan thứ hai có 2 cách

Theo quy tắc nhân, ta có 5.4.3.2 = 120 cách (3)

Từ (1), (2), (3), theo quy tắc cộng ta có: 240 + 180 + 120 = 540 cách.

1.4.2. Hoán vị

Định nghĩa Cho X là một tập hợp gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Số các hoán vị của n phần tử là: $P_n = n! = 1.2.3 \dots n$

Quy ước: 0! = 1

Ví dụ 3 Từ tập X = {2, 5, 7, 8} có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

Ta có một số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau từ tập X là một hoán vị của 4 phần tử. Vậy có $P_4 = 4! = 1.2.3.4 = 24$ số tự nhiên có 4 chữ số được tạo từ X.

Ví dụ 4 Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh vào một cái bàn có 5 chỗ ngồi?

Ta có mỗi cách xếp chỗ ngồi là một hoán vị của 5 học sinh đó, vậy có $P_5 = 5! = 1.2.3.4.5 = 120$ cách xếp.

1.4.3. Chỉnh hợp

Định nghĩa Cho X là một tập hợp gồm n phần tử. Một chỉnh hợp chập k của n phần tử trong X ($k \leq n$) là một bộ gồm k phần tử khác nhau của X được sắp xếp theo một thứ tự nhất định.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ví dụ 5 Từ tập X = {2, 5, 7, 8} có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau?

Mỗi số tự nhiên như thế là một chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử trong X. Vậy có $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$ số.

Ví dụ 6 Một lớp gồm 30 học sinh. Cần chọn ra một ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập và 1 lớp phó đời sống. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Ta có số cách chọn là A_{30}

1.4.4. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa Cho X là một tập hợp gồm n phần tử. Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử trong X là một bộ gồm k phần tử (có thể trùng nhau) của X được sắp xếp theo một thứ tự nhất định.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là: $\bar{A}_n^k = n^k$

Ví dụ 7 Từ tập X = {2, 5, 7, 8} có thể lập được $\bar{A}_4^2 = 4^2 = 16$ số tự nhiên có 2 chữ số.

Ví dụ 8 Có $\bar{A}_3^8 = 3^8 = 6561$ cách xếp 8 hành khách vào 3 toa tàu.

1.4.5. Tổ hợp

Định nghĩa Cho X là một tập hợp gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của X ($k \leq n$) gọi là một tổ hợp chập k phần tử của n phần tử.

Số tổ hợp chập k của n phần tử là: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ví dụ 9 Cho tập X = {2, 5, 7, 8}. Số tập hợp con gồm 2 phần tử của X là $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Ví dụ 10 Trong một tổ có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ trưởng muốn chọn ra 3 học sinh để làm trực nhật lớp học, trong đó phải có ít nhất một học sinh nam. Hỏi tổ trưởng có bao nhiêu cách chọn.

Số cách chọn 3 học sinh trong 12 bạn là $C_{12}^3 = 220$

Số cách chọn 3 học sinh nữ trong 12 bạn là $C_4^3 = 4$

Vậy tổ trưởng có số cách chọn là 220 – 4 = 216 (cách).

Các tính chất của tổ hợp:

$$1.\ C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$2.\ C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

$$3.\ C_n^0 = 1;\ C_n^n = 1;\ C_n^1 = n$$

Nhị thức Newton

Nhị thức Newton là lũy thừa bậc nguyên dương n của tổng hai số hạng $(a+b)^n$, trong đó a, b là các số thực.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Ví dụ 11 Trong khai triển của $(1+ax)^n$ ta có số hạng thứ 2 là $24x$ và số hạng thứ 3 là $252x^2$. Tìm a, n.

Ta có

$$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (ax)^k$$

Như vậy theo đề ra, ta có: $\begin{cases} C_n^1 a = 24 \\ C_n^2 a^2 = 252 \end{cases}$. Giải hệ ta được a = 3 và n = 8.

Ví dụ 12 Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(x+1)^4 + (x+1)^5 + (x+1)^6 + (x+1)^7$.

Ta có hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức trên là $C_5^5 + C_6^5 + C_7^5 = 28$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Sinh viên cần biết vận dụng các kiến thức đã học vào các dạng bài tập sau:

– Bài tập về các phép toán trên tập hợp.

– Bài tập về quan hệ hai ngôi, quan hệ tương đương, lớp tương đương, tập thương, bài tập về quan hệ thứ tự.

– Bài tập về khái niệm ánh xạ, ảnh và tạo ảnh. Bài tập về các ánh xạ đặc biệt, ánh xạ tích, ánh xạ ngược.

TẬP HỢP

1. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp dưới đây:

a. A là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn -2016 và nhỏ hơn 7.

b. $B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là ước của } 6\}$

c. $C = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 3, -4 < x < 10 \}$

2. Dùng tính chất đặc trưng của các phần tử để biểu diễn các tập hợp sau:

a. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

b. $B = \{ 1, 4, 9, 16\}$

c. $C = \{..., -4, -1, 2, 5, 8,...\}$

3. Trong tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$, cho các tập con

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 6\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 2\}$ $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 6\}$

Hãy xác định quan hệ giữa các tập hợp

a. A và B b. C và D c. A và D

4. Hãy xác định các tập hợp $A \cap B$, $C \cap D$ và $A \cup C$ trong bài 3

5. Sinh viên Tiểu học trường sư phạm đi thực tập bằng ba phương tiện giao thông: xe đạp, xe máy và xe buýt. Gọi A là tập hợp sinh viên đi thực tập bằng xe đạp, B là tập hợp sinh viên đi thực tập bằng xe máy, C là tập hợp sinh viên đó đi thực tập bằng xe buýt. Nếu gọi X là tập hợp sinh viên tiểu học trường sư phạm đi thực tập thì Cx(A), Cx(B), Cx(C) là những tập hợp nào?

6. Cho A là tập các hình vuông, B là tập hợp các hình thoi, C là tập các hình chữ nhật và D là tập các hình bình hành.

a. Tìm mối quan hệ giữa các tập hợp trên

b. Xác định các tập hợp $A \cap B$, $B \cap C$, $D \setminus C$ và $B \setminus (A \cup C)$

7. Cho hai tập hợp A, B. Mệnh đề nào sau đây sai:

a. $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ b. $A \subset (A \cup B)$

c. $A \subset (A \cap B)$ d) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

8. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 6\}$. Chọn mệnh đề đúng.

a. $A \cup (B \cap C) = [1; 6)$ b. $A \cup (B \cap C) = [1; 6]$

b. $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1; 6\}$ d) $(A \cup B \cap (A \cup C) = (1; 6]$

9. Trong số 200 học sinh khối 5 của trường TH Võ Thị Sáu có 50% học sinh mặc áo len, 65% học sinh đội mũ, còn 15% học sinh không mặc áo len và cũng không đội mũ. Hỏi có bao nhiêu học sinh vừa mặc áo len vừa đội mũ?

10. Trong số 100 học sinh có: 28 người học tiếng Pháp, 30 người học tiếng Nhật, 42 người học tiếng Anh. 8 người học cả tiếng Pháp và tiếng Nhật, 10 người học tiếng Pháp và tiếng Anh, 5 người học tiếng Nhật và tiếng Anh. Có 3 người học cả ba thứ tiếng. Hỏi:

a. Bao nhiêu người học ngoại ngữ ?

b. Bao nhiêu người chỉ học tiếng Anh ?

c. Bao nhiêu người học tiếng Anh mà không học tiếng Nhật?

11. Chứng minh rằng:

a. Nếu $X \subset Y$ thì $X \setminus Y = \emptyset$; b. $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$;

c. $C_X(X) = \emptyset$; d. $C_X(\emptyset) = X$;

12. Chỉ ra các phần tử của mỗi tập hợp sau, nó có bao nhiêu phần tử ?

a. $A = \{\emptyset\}$ b. $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

13. Viết các tập con của tập hợp sau:

a. $A = \{a\}$ b. $B = \{a, b\}$ c. $C = \{a, b, c\}$

QUAN HỆ HAI NGÔI

14. Trên tập hợp X = {1, 2, 3, 4, 5, 6 } cho các quan hệ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5

a R_1 b $\Leftrightarrow$ a = b

a R_2 b $\Leftrightarrow$ a $\leq$ b

a R_3 b $\Leftrightarrow$ a < b

a R_4 b $\Leftrightarrow$ a chia hết cho b

a R_5 b $\Leftrightarrow$ a +b là số chẵn

Hãy liệt kê các phần tử của các quan hệ đó.

15. Trên tập X tất cả các trẻ em xác định quan hệ $\mathcal{R}$ như sau:

$\forall$a, b $\in$ X, a $\mathcal{R}$ b $\Leftrightarrow$ a, b có cùng bố và cùng mẹ.

a. Chứng minh □ là quan hệ tương đương.

b. Kết luận trên có còn đúng không với quan hệ □' xác định sau đây:

$\forall$a, b $\in$ X, a $\mathcal{R}$'b $\Leftrightarrow$ a, b có cùng bố hoặc cùng mẹ.

16. Trong tập $\mathbb{R}$ xác định một quan hệ hai ngôi S như sau:

$\forall$ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, (x_1, y_1) S $(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

a. Chứng minh rằng S là quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$.

b. Xác định lớp tương đương [(a, b)], (a, b) $\in \mathbb{R}_2$ và tập thương $\mathbb{R}_2$/ S ? Hãy biểu diễn hình học tập thương này.

17. Cho X là tập các điểm trên mặt phẳng, O là một điểm trước thuộc X. Trên tập X xác định các quan hệ S_1, S_2 và S_3 như sau:

$\forall$ M, N $\in$ X, M S_1 N $\Leftrightarrow$ OM = ON

$\forall$ M, N $\in$ X, M S_2 N $\Leftrightarrow$ O, M, N thẳng hàng

$\forall$ M, N $\in$ X \ {O}, M S_3 N $\Leftrightarrow$ O, M, N thẳng hàng

Trong các quan hệ ở trên, quan hệ nào là quan hệ tương đương ? Tìm tập thương.

18. Hãy xác định quan hệ thứ tự trong tập hợp tất cả học sinh của một lớp dựa theo tiêu chuẩn sau:

a. Theo tuổi của học sinh.

b. Theo chiều cao của học sinh.

c. Theo học lực của học sinh.

d. Theo tên của học sinh.

19. Trên tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên xác định các quan hệ S như sau:

$\forall a, b \in \mathbb{N}$, a S_1 b $\Leftrightarrow$ a, b có ước số chung là p (p không đổi, $p \neq 1$)

$\forall a, b \in \mathbb{N}$, a S_2b $\Leftrightarrow$ a + b là số tự nhiên chẵn

Trong các quan hệ ở trên, quan hệ nào là quan hệ thứ tự, quan hệ nào là quan hệ tương đương ? Tìm tập thương của các quan hệ tương đương.

20. Trên tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên, xác định quan hệ * và $\mathcal{R}$ như sau:

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, a * b $\Leftrightarrow$ a = b = 0 hoặc a, b cùng dấu.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, a $\mathcal{R}$ b $\Leftrightarrow$ $a \equiv b \pmod 3$ $\Leftrightarrow$ a – b chia hết cho 3

a. Chứng minh * là quan hệ tương đương. Tìm tập thương $\mathbb{Z}$ /*

b. Chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương. Tìm tập thương $\mathbb{Z}$ /$\mathcal{R}$

21. Trong tập hợp $\wp(X)$ các tập con của tập hợp X, quan hệ S được cho như sau

$\forall$ A, B $\in$ $\wp(X)$, ASB $\Leftrightarrow$ A$\subset$ B

a. Chứng minh rằng S là một qua hệ thứ tự. Với điều kiện nào của X thì S là quan hệ thứ tự toàn phần?

b. Tìm phần tử nhỏ nhất, lớn nhất, tối đại, tối tiểu của tập hợp $\wp(X)$ đối với quan hệ S.

22. Trong tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ cho quan hệ S_1, S_2

$\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$, a S_1 b $\Leftrightarrow$ $a_2 \leq b_2$

$\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$, a S_2 b $\Leftrightarrow$ $a_3 \leq b_3$

Quan hệ nào là quan hệ thứ tự ? Quan hệ nào là quan hệ thứ tự toàn phần ?

ÁNH XẠ

23. Cho các tập hợp X = {□, Δ, ○, *} và Y = {đỏ, xanh, vàng, tím, nâu}

a. Hãy thiết lập một số ánh xạ từ tập X vào tập Y. Trong các ánh xạ đó ánh xạ nào là đơn ánh, là toàn ánh, là song ánh?

b. Cho hai qui tắc tương ứng các phần tử của tập X với các phần tử của tập Y mà không phải là ánh xạ.

24. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là đơn ánh, là toàn ánh, là song ánh?

$f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_3: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x + 1$ $x \mapsto f(x) = 2x + 1$ $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ $x \mapsto f(x) = x_2$

25. Cho G = { (3, 4), (a, 2), (1, b), (c, 4)} $\subset X \times Y$ hãy thiết lập ánh xạ từ X đến Y sao cho G là đồ thị của ánh xạ đó.

26. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x_2 + 4x - 5$$

a. Hãy tìm f(0), f(1), f(–5)

b. Xác định f([–1, 2]), Imf = f($\mathbb{R}$)

c. Tìm $f_{-1}(0)$, $f_{-1}(1)$, $f_{-1}([0, -1])$

d. Xét tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh của ánh xạ f

27. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x + 1$$

a. Xét tính đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ f.

b. Vẽ đồ thị G của ánh xạ f. Điểm M(–2; 1) có thuộc đồ thị không?

28. Chứng tỏ các ánh xạ sau là song ánh và tìm các ánh xạ ngược của nó

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_3: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ $f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x + 1$ $x \mapsto -x$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto x_3$

29. Cho các ánh xạ $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$

a. Nếu $g \circ f$ là một toàn ánh thì có thể kết luận gì về ánh xạ g? Chứng minh.

b. Nếu $g \circ f$ là một đơn ánh thì có thể kết luận gì về ánh xạ f ? Chứng minh.

30. Tìm ánh xạ ngược của ánh xạ sau:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ b. $g: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\} \to \mathbb{R}^*$

$x \mapsto ax + b \ (a \neq 0)$ $x \mapsto \frac{1}{5x - 2}$

31. Chứng minh ánh xạ ngược của các ánh xạ sau là chính nó:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ b) $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x$ $\qquad$ $x \mapsto -\frac{1}{x}$

32. Chứng minh nếu f có ánh xạ ngược f^{-1} thì f là một song ánh.

33. Tìm ánh xạ tích $g \circ f$ và $f \circ g$, biết rằng:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x + 1$ $\qquad$ $x \mapsto \cos x$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x + 1$ $\qquad$ $x \mapsto \frac{x-1}{2}$

34. Cho $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$ là những song ánh.

Chứng minh: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

35. Cho ánh xạ $f: X \to Y$ và $A \subset X$, $B \subset Y$. Chứng minh:

a. $f^{-1}(f(A)) \supset A$

b. $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Với điều kiện nào của ánh xạ f thì:

c. $f^{-1}(f(A)) = A$ với mọi tập con A của X.

d. $f(f^{-1}(B)) = B$ với mọi tập con B của Y.

36. Cho ánh xạ $f: X \to Y$ và $A_1, A_2 \subset X$. Chứng minh:

a. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

b. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

c. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

Tìm ví dụ cho thấy câu c. không thỏa mãn quan hệ bao hàm ngược lại.

GIẢI TÍCH TỔ HỢP

37. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

A. 192 $\quad$ B. 202 $\quad$ C. 211 $\quad$ D. 180

38. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên

1. Gồm 4 chữ số

A. 1296 $\quad$ B. 2019 $\quad$ C. 2110 $\quad$ D. 1297

2. Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau

A. 110 B. 121 C. 120 D. 125

3. Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và là chữ số tự nhiên chẵn

A. 182 B. 180 C. 190 D. 192

4. Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và không bắt đầu bằng chữ số 1

A. 300 B. 320 C. 310 D. 330

5. Gồm 6 chữ số đôi một khác nhau và hai chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau.

A. 410 B. 480 C. 500 D. 512

39. Từ các số của tập A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau trong đó có hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

A. 360 B. 362 C. 345 D. 368

40. Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần).

A. 3991680 B. 12! C. 35831808 D. 7!

41. Từ các chữ số của tập hợp A = {0,1, 2, 3, 4, 5, 6} lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm

1. 5 chữ số

A. 14406 B. 13353 C. 15223 D. 14422

2. 4 chữ số đôi một khác nhau

A. 418 B. 720 C. 723 D. 731

3. 4 chữ số đôi một khác nhau và là số lẻ

A. 300 B. 324 C. 354 D. 341

4. 5 chữ số đôi một khác nhau và là số chẵn.

A. 1260 B. 1234 C. 1250 D. 1235

42. Một liên đoàn bóng rổ có 10 đội, mỗi đội đấu với mỗi đội khác hai lần, một lần ở sân nhà và một lần ở sân khách. Số trận đấu được sắp xếp là:

A. 45 B. 90 C. 100 D. 180

43. Giả sử ta dùng 5 màu để tô cho 3 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Số các cách để chọn những màu cần dùng là:

A. 5!/2! B. 8 C. 5!/(3!2!) D. 5_3

44. Tên 15 học sinh được ghi vào 15 tờ giấy để vào trong hộp. Chọn tên 4 học sinh để cho đi du lịch. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các học sinh:

A. 4! B. 15! C. 1365 D. 32760

45. Trong một buổi hoà nhạc, có các ban nhạc của các trường đại học từ Huế, Đà Nẵng, Quy Nhơn, Nha Trang, Đà Lạt tham dự. Tìm số cách xếp đặt thứ tự để các ban nhạc Nha Trang sẽ biểu diễn đầu tiên.

A. 4 B. 20 C. 24 D. 120

46. Số tam giác xác định bởi các đỉnh của một đa giác đều 10 cạnh là:

A. 35 B. 120 C. 240 D. 720

47. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

48. Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 em khối 12, 6 em khối 11 và 5 em khối 10. Tính số cách chọn 6 em trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em được chọn

A. 41811 B. 42802 C. 41822 D. 32023

49. Trong một môn học, Thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó,10 câu trung bình và 15 câu dễ.Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra,mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau,sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ cả 3 câu (khó, dễ, Trung bình) và số câu dễ không ít hơn 2?

A. 41811 B. 42802 C. 56875 D. 32023

50. Một nhóm học sinh gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một đội cờ đỏ sao cho phải có 1 đội trưởng nam, 1 đội phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội cờ đỏ.

A. 131444 B. 141666 C. 241561 D. 111300

CHƯƠNG 2. CƠ SỞ LOGIC TOÁN

2.1. Mệnh đề và các phép toán logic

2.1.1. Khái niệm mệnh đề

Đặc trưng của toán học là tiến hành các chứng minh, tức là đưa ra những định lí mới từ những định lí khác nhờ các suy luận toán học. Một trong những nhiệm vụ chính của logic mệnh đề là đặt cơ sở ban đầu để nghiên cứu thực chất của các phép suy luận toán học và thiết lập các tiêu chuẩn về sự đúng đắn của các suy luận đó.

Đối tượng chính của logic mệnh đề là mệnh đề.

Xét các câu sau:

6 là số tự nhiên chẵn (là khẳng định đúng)

9 không chia hết cho 3 (là khẳng định sai)

Mặt trời mọc ở phía đông (là khẳng định đúng)

Trong các câu trên, có các câu khẳng định một sự kiện nào đấy có thể đúng, có thể sai tùy theo chúng phản ánh đúng hay sai thực tế khách quan.

Một câu khẳng định mà tính chân thực của nó được xác định một cách khách quan, cụ thể gọi là một mệnh đề.

2 là số tự nhiên chẵn (là mệnh đề đúng)

9 không chia hết cho 3 (là mệnh đề sai)

Mặt trời mọc ở phía đông (là mệnh đề đúng)

Những câu sau không phải là mệnh đề:

Hôm nay trời có mưa không?

Hãy lấy một số tự nhiên nhân với 4!

x là số tự nhiên chẵn.

Các mệnh đề mà chúng ta sẽ nói đến đều có tính chất sau đây:

- Mệnh đề hoặc là đúng hoặc là sai.
- Mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

Trong thực tế, chúng ta gặp những câu mà giá trị đúng hoặc sai của nó phụ thuộc vào những điều kiện nhất định (thời điểm, thời gian, ...). Nếu ở thời điểm

này đúng thì ở thời điểm khác nó lại sai. Những loại câu này gọi là các mệnh đề mở. Chẳng hạn:

– Hôm nay trời có mưa.

– Các bạn học sinh lớp ta rất giỏi…

Trong logic mệnh đề, người ta không quan tâm đến cấu trúc ngữ pháp cũng như ý nghĩa nội dung của mệnh đề mà chỉ quan tâm đến tính đúng, sai của các mệnh đề đó. Để kí hiệu các mệnh đề ta dùng các chữ thường p, q, r...

Ta qui ước viết p = 1 nếu mệnh đề p đúng và viết p = 0 nếu mệnh đề p sai. Các giá trị 0 và 1 gọi là giá trị chân lý của mệnh đề.

2.1.2. Các phép toán logic

Với các phép toán đại số, từ các số x, y nào đó ta có thể lập được các số mới x.y; x + y; x – y; x: y; …

Tương tự như thế, trên tập hợp các mệnh đề, với một vài mệnh đề cho trước, bằng một qui tắc nhất định, ta có thể lập được các mệnh đề mới.

Các qui tắc thiếp lập mệnh đề mới này gọi là các phép toán mệnh đề (còn được gọi là các phép toán logic.

Ta sẽ lần lượt nghiên cứu một số phép toán mệnh đề cơ bản.

2.1.2.1. Phép phủ định

Xét mệnh đề đúng *"số 5 là số tự nhiên lẻ"*. Từ mệnh đề này ta lập mệnh đề "*số 5 không là* số *tự nhiên lẻ*". Rõ ràng, mệnh đề mới này sai.

Lại xét ví dụ khác. Xét mệnh đề sai: *"Độ tuổi của trẻ mẫu giáo là từ 1 tuổi đến 6 tuổi"*. Từ mệnh đề này ta lập mệnh đề mới: *"Độ tuổi của trẻ mẫu giáo không phải từ 1 tuổi đến 7 tuổi"* rõ ràng mệnh đề mới này đúng.

Mệnh đề "*số 5 không là* số *tự nhiên lẻ*", "*Độ tuổi của trẻ mẫu giáo không phải từ 1 tuổi đến 7 tuổi*" lần lượt gọi là mệnh đề phủ định của mệnh đề: *"số 5 là số tự nhiên lẻ"* và "*Độ tuổi của trẻ mẫu giáo là từ 1 tuổi đến 7 tuổi*"

Như vậy ta thấy rằng nếu mệnh đề đúng thì mệnh để phủ định của nó là sai và ngược lại.

Định nghĩa:

Phủ định của mệnh đề p, kí hiệu là $\bar{p}$ (đọc là "không p") là mệnh đề sai khi p đúng và đúng khi p sai.

Giá trị chân lý được xác định bởi bảng sau:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Ví dụ 1

a. p: "2 < 3" (p = 1)

$\overline{p}$: "2 ≥ 3" ($\overline{p}$ = 0)

b. p: "6 không chia hết cho 3 " (p = 0)

$\overline{p}$: "không phải là 6 không chia hết cho 3" ($\overline{p}$ = 1)

c. p: "hàm số y = cosx là một hàm số chẵn" (p = 1)

$\overline{p}$: "hàm số y = cosx không phải là hàm số chẵn" ($\overline{p}$ = 0)

d. p: "Hình bình hành có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường" (p = 1)

$\overline{p}$: "Hình bình hành không có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường" ($\overline{p}$ = 0)

Chú ý:

Trong thực tế chúng ta có rất nhiều cách diễn đạt khác nhau cho phủ định của một mệnh đề, chẳng hạn:

"5 không là số tự nhiên chẵn"

"không phải 5 là số tự nhiên chẵn".

"5 đâu có phải là số tự nhiên chẵn"...

2.1.2.2. Phép hội

Cho hai mệnh đề:

p: "2 < 3"

q: "2 = 3"

Nối hai mệnh đề đó bằng liên từ "*và*" ta được mệnh đề mới: "*2 < 3 và 2 = 3*".

Mệnh đề mới này gọi là hội của hai mệnh đề đã cho.

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Định nghĩa:

Hội của hai mệnh đề p và q, kí hiệu p ∧ q (đọc là "p và q") là mệnh đề chỉ đúng khi cả hai mệnh đề p và q đều đúng còn sai trong các trường hợp còn lại.

Giá trị chân lý của mệnh đề hội được xác định bởi bảng bên

Ví dụ 2

a. p: "π lớn hơn 3" (p = 1)

q: "π nhỏ hơn 4" (q = 1)

p ∧ q: "π lớn hơn 3 và π nhỏ hơn 4" (p ∧ q = 1)

b. p: "2 không là số tự nhiên chẵn" (p = 0)

q: "6 chia hết cho 3" (q = 1)

p ∧ q: "2 không là số tự nhiên chẵn và 6 chia hết cho 3" (p ∧ q = 0)

Chú ý:

- Để thiết lập mệnh đề hội ta có thể ghép hai mệnh đề bởi các liên từ: nhưng, mà, song, đồng thời, vẫn... hoặc dùng dấu phẩy, hoặc không dùng liên từ gì.

- Trong thực tế, đôi khi trong mệnh đề có liên từ "*và*" nhưng lại không có nghĩa của mệnh đề hội.

2.1.2.3. Phép tuyển

Nối hai mệnh đề cho trước bằng liên từ "*hoặc*" ta được một mệnh đề mới gọi là tuyển của hai mệnh đề.

Định nghĩa:

Tuyển của hai mệnh đề p và q kí hiệu là p∨ q (đọc là "p hoặc q") là mệnh đề chỉ sai khi cả hai mệnh đề p, q đều sai còn đúng trong các trường hợp còn lại.

p	q	p∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Giá trị chân lý của mệnh đề p∨ q được xác định bởi bảng bên.

Ví dụ 3

a. p: "2 < 3" (p = 1)

q: "2 = 3" (q = 0)

p∨q: "2 < 3 hoặc 2 = 3" = "2 ≤ 3" (p∨ q = 1)

b. p: "2 không là số tự nhiên chẵn" (p = 0)

q: "6 chia hết cho 3" (q = 1)

p∨ q: "2 không là số tự nhiên chẵn hoặc 6 chia hết cho 3" (p ∨ q = 1)

c. p: "hàm $y = (x + 1)_2$ là hàm số chẵn" (p = 0)

q: " hàm $y = (x + 1)_2$ là hàm số lẻ". (p = 0)

p∨ q: "Hàm số $y = (x + 1)_2$ là hàm số chẵn hoặc hàm số lẻ" (p = 0)

d. p: "Mặt trời mọc ở phía đông" (p = 0)

q: "Mặt trời lặn ở phía đông" (q = 0)

p ∨ q: "Mặt trời mọc hoặc lặn ở phía đông" (p ∨ q = 1)

Chú ý:

- Đôi khi chúng ta dùng dấu chấm phẩy thay cho liên từ hoặc trong mệnh đề tuyển.

- Trong thực tế, liên từ "*hoặc*" thường được dùng với hai nghĩa: loại trừ và không loại trừ.

+ "*hoặc a hoặc b*" dùng với nghĩa loại trừ: chỉ xảy ra a hoặc b nhưng không thể cả a và b.

Chẳng hạn: "*số 3 hoặc là số chẵn hoặc là số lẻ*" dùng theo nghĩa loại trừ.

+ "*a hoặc b*" dùng với nghĩa không lọai trừ: xảy ra a hoặc b và cũng có thể cả a lẫn b.

Chẳng hạn: "*số 6 là số chia hết cho 2 hoặc cho 3*" dùng theo nghĩa không loại trừ

- Trong logic mệnh đề ta chỉ sử dụng liên từ "*hoặc*" không theo nghĩa loại trừ.

2.1.2.4. Phép kéo theo

Định nghĩa:

Mệnh đề "*p kéo theo q*", kí hiệu p ⇒ q (còn đọc là "*nếu p thì q*") là mệnh đề chỉ sai khi mệnh đề p đúng và q sai còn đúng trong các trường hợp còn lại.

Giá trị chân lý của mệnh đề p ⇒ q được xác định bởi bảng bên.

p	q	p ⇒ q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ví dụ 4

a. p = "2 < 3" (p = 1)

q = "2 = 3" (q = 0)

p ⇒ q = "Nếu 2 < 3 thì 2 = 3" (p ⇒ q = 0)

b. p = "2 không là số tự nhiên chẵn" (p = 0)

q = "6 chia hết cho 3" (q = 1)

p⇒ q = "Nếu 2 không là số tự nhiên chẵn thì 6 chia hết cho 3" (p ⇒q = 1)

c. p = "Mặt trời mọc ở phía tây" (p = 0)

q = "Mặt trời lặn ở phía đông" (q = 0)

p ⇒ q = "Nếu mặt trời mọc ở phía tây thì lặn phía đông" (p ⇒q= 1)

Chú ý

- Mệnh đề "*p ⇒ q*" thường diễn đạt dưới nhiều cách khác nhau, chẳng hạn:

"*Nếu có p thì có q*"

"*p suy ra q*"

"*có p thì có q*"...

- Trong logic học, khi xét các giá trị chân lý của mệnh đề "*p ⇒ q*" người ta không quan tâm đến mối liên hệ về nội dung của nó. Nghĩa là, không phân biệt xem q có phải là hệ quả của p hay không, mà chỉ quan tâm đến tính đúng sai của chúng.

2.1.2.5. Phép tương đương

Định nghĩa:

Mệnh đề "*p tương đương q*", kí hiệu là p ⇔ q (còn đọc "*p khi và chỉ khi q*") là mệnh đề đúng khi mệnh đề p và q cùng đúng hay cùng sai, còn sai trong các trường hợp còn lại.

p	q	p ⇔ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Giá trị chân lý của mệnh đề p ⇔ q được xác định bởi bảng bên.

Ví dụ 5

a. p = "2 < 3" (p = 1)

q = "2 = 3" (q = 0)

p ⇔ q = " 2 < 3 khi và chỉ khi 2 = 3" (p ⇔ q = 0)

b. p = " 2 không là số tự nhiên chẵn" (p = 0)

q = "6 chia hết cho 3" (q = 1)

p ⇔ q = "2 không là số tự nhiên chẵn khi và chỉ khi 6 chia hết cho 3"

(p ⇔ q = 0)

c. p = "Mặt trời mọc ở phía tây" (p = 0)

q = "Mặt trời lặn ở phía đông" (q = 0)

p ⇔ q = "Mặt trời mọc ở phía tây khi và chỉ khi lặn phía đông"

(p ⇔ q = 1)

CÂU HỎI

1. Mô tả khái niệm mệnh đề. Cho ví dụ và hãy tìm giá trị chân lý của mệnh đề đó.
2. Định nghĩa các phép toán mệnh đề.

2.2. CÔNG THỨC

2.2.1. Khái niệm công thức

Giả sử cho p, q, r.. là các mệnh đề nào đó (thực ra do tính không xác định của các kí hiệu p, q, r.. nên đúng ra phải gọi chúng là các biến mệnh đề)

Xuất phát từ các biến mệnh đề đơn giản trên (gọi là các biến mệnh đề gốc., nhờ các phép toán logic $\bar{}$,$\wedge$,$\vee$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ ta có thể thành lập được các mệnh đề phức tạp hơn.

Chẳng hạn: $\bar{q} \Rightarrow p$; $(p \vee q) \wedge r$ …

Hay $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$; $(\ p \wedge q) \Rightarrow r$; $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;…

Bằng cách này, ta lập nên một dãy gồm các kí hiệu biến mệnh đề, các phép toán logic và các dấu ngoặc phân cách gọi là công thức mệnh đề.

Định nghĩa

1. Các biến mệnh đề gốc p, q, r,... là các công thức mệnh đề

2. Nếu p là công thức mệnh đề thì (p) và $\bar{p}$ là công thức mệnh đề

3. Nếu p là công thức mệnh đề thì $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ và $p \Leftrightarrow q$ là công thức mệnh đề

Ví dụ 1: $(p \wedge q) \Rightarrow r$ là công thức.

– p, q và r là những công thức (theo 1)

– $(p \wedge q)$ là công thức (theo 3)

– $(p \wedge q) \Rightarrow r$ là công thức (theo 3)

Khi thay các biến mệnh đề p, q, r,... bằng các mệnh cụ thể thì công thức trở thành một mệnh đề xác định. Giá trị chân lý của mệnh đề này phụ thuộc vào giá trị chân lý của các mệnh đề p, q, r,...

Ví dụ 2: Xét công thức $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Thay các mệnh đề: p: "*45 chia hết cho 3*",

q: "*45 chia hết cho 5*"

và r: "*45 chia hết cho 15*"

thì ta có các mệnh đề:

$(p \wedge q) \Rightarrow$ r: "*Nếu 45 chia hết cho 3 và 45 chia hết cho 5 thì 45 chia hết cho 15*"

2.2.2. Công thức tương đương logic

2.2.2.1. Hàm giá trị chân lí (hàm chân trị)

Khi thay p, q, r… trong công thức bởi các mệnh đề cụ thể (tức là biết tính đúng sai của nó) thì công thức sẽ trở thành một mệnh đề xác định. Giá trị chân lí của mệnh đề này tất nhiên phụ thuộc vào giá trị chân lí của các mệnh đề p, q, r… và vào kết quả thực hiện của các phép tính logic.

Định nghĩa:

- Cho $S(p_1, p_2,..., p_n)$ là công thức mệnh đề, kí hiệu $G = \{0, 1\}$. Khi thay các biến mệnh đề $(p_1, p_2,..., p_n)$ bằng các mệnh đề cụ thể thì công thức S trở thành một mệnh đề có giá trị chân lí trong tập G.

- Hai công thức mệnh đề $S(p_1,..., p_n)$ và $T(p_1,..., p_n)$ gọi là "bằng nhau" (hoặc là "tương đương logic") và kí hiệu là $S(p_1,..., p_n) \equiv T(p_1,..., p_n)$ nếu hai hàm giá trị chân lí của chúng bằng nhau.

Tức là $\forall (p_1,..., p_n) \in B_n$, $S(p_1,..., p_n) = T(p_1,..., p_n)$

Biểu thức $S(p_1,...,p_n) \equiv T(p_1,...,p_n)$ gọi là một đẳng thức logic.

Ví dụ 3:

Lập bảng chân lí của công thức $A= (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$(p\wedge q)\vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Qua bảng chân lí này ta có thể nói:

Khi p và q là mệnh đề sai thì mệnh đề $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$ đúng.

Chú ý: Nếu công thức chứa n mệnh đề thì bảng chân lí có 2_n bộ giá trị.

Ví dụ 4:

1. Chứng minh $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

Ta lập bảng giá trị chân lí

P	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Từ bảng giá trị chân lí, ta thấy hai công thức $\overline{p \wedge q}$ và $\overline{p} \vee \overline{q}$ nhận giá trị như nhau tại mọi bộ giá trị của biến mệnh đề p và q, do đó hai công thức bằng nhau.

2. Chứng minh $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Ta lập bảng giá trị chân lí

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

2.2.2.2. Các đẳng thức (tương đương logic) cơ bản

Bằng cách lập bảng chân lý ta có thể chứng minh các đẳng thức cơ bản sau:

1. Phủ định kép $\overline{\overline{p}} \equiv p$
2. Giao hoán $p \wedge q \equiv q \wedge p$

   $p \vee q \equiv q \vee p$
3. Kết hợp $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

   $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
4. Phân phối $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. Luật De Morgan $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

   $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$
6. Luỹ đẳng $p \wedge p \equiv p$

   $p \vee p \equiv p$

7. Hằng logic $0 \wedge p \equiv 0$ $0 \vee p \equiv p$ $1 \wedge p \equiv p$

$1 \vee p \equiv 1$ $p \wedge \overline{p} \equiv 0$ $p \vee \overline{p} \equiv 1$

8. Phép kéo theo $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q \equiv \overline{p \wedge \overline{q}}$

$p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$

2.2.3. Phép biến đổi công thức

2.2.3.1. Phép biến đổi tương đương

Một trong các bài toán cơ bản của logic mệnh đề là tìm công thức tương đương đơn giản của một công thức mệnh đề. Các phép biến đổi biến một công thức mệnh đề thành công thức tương đương gọi là phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 5 Rút gọn công thức

$\vee \Rightarrow (\overline{p \wedge q}\quad p\quad q)\quad r$

Thực hiện biến đổi công thức, ta có:

$\vee \Rightarrow (\overline{p \wedge q}\quad p\quad q)\quad r \equiv [\overline{\overline{p \vee q}} \vee (p \vee q)] \wedge r$

$\equiv [(p \vee q) \vee (p \vee q)] \wedge r$

$\equiv (p \vee q) \wedge r$

Để thực hiện các phép biến đổi tương đương ta thường sử dụng các đẳng thức cơ bản đã nêu ở mục trên. Để biến đổi công thức một cách thuận tiện, đôi khi người ta đưa ra các qui ước như sau:

– Các phép toán logic được thực hiện theo thứ tự : (), —, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

– Bỏ dấu ngoặc ngoài cùng: (S), hay trên công thức có dấu phủ định ($\overline{S}$)

– Không viết kí hiệu phép hội "$\wedge$"

Ví dụ 6 Chứng minh đẳng thức

$$(\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge r$$

Trước hết ta viết công thức trên theo qui ước

$$\overline{p}\, q\, r \vee \overline{p}\, \overline{q}\, r \vee q\, r \equiv (p \Rightarrow q)\, r$$

Thực hiện biến đổi công thức

$$q\, r \vee \overline{p}\, \overline{q}\, r \vee q\, r \equiv (\overline{p} q \vee \overline{p}\, \overline{q})\, r \vee qr \equiv \overline{p}\, (q \vee \overline{q})\, r \vee q\, r$$

$$\equiv \bar{p}\, r \vee q\, r \equiv (\bar{p} \vee q)\, r \equiv (p \Rightarrow q)\, r$$

Chú ý: Ta có thể chứng minh đẳng thức trên bằng cách lập bảng giá trị chân lý.

2.2.3.2. Công thức dạng chuẩn tắc

Định nghĩa

Hội của các biến mệnh đề hay phủ định của chúng gọi là một hội sơ cấp. Tuyển của các hội sơ cấp gọi là một dạng chuẩn tuyển.

Ví dụ 7

- $\bar{p} \wedge q \wedge r$ là hội sơ cấp

- $(\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{p} \wedge r)$ là dạng chuẩn tuyển

Định lý 1.1 Mọi công thức đều có dạng chuẩn tuyển tương đương.

Chứng minh

Sử dụng các đẳng thức tương đương cơ bản chuyển phép kéo theo, phép tương đương qua phép tuyển. Sau đó dùng đẳng thức phân phối của phép tuyển đối với phép hội biến đổi công thức nhận được về tuyển của các hội sơ cấp.

Ví dụ 8

1. Tìm dạng chuẩn tuyển và rút gọn công thức: $p \wedge (p \Rightarrow q)$

Ta có:

$p \wedge (p \Rightarrow q)$

$\equiv p \wedge (\bar{p} \vee q)$

$\equiv (p \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge q)$ (dạng chuẩn tuyển)

$\equiv 0 \vee (p \wedge q)$

$\equiv p \wedge q$

2. Tìm dạng chuẩn tuyển và rút gọn công thức: $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

Ta có:

$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

$\equiv (p \wedge (\bar{p} \vee q)) \Rightarrow q$

$\equiv ((p \wedge \bar{p}) \vee (p \wedge q) \Rightarrow q$

$\equiv (0 \vee (p \wedge q)) \Rightarrow q$

$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow q$

$\equiv \overline{p \vee q} \quad q$

$\equiv \bar{p} \vee \bar{q} \vee q$ (dạng chuẩn tuyển)

$\equiv \bar{p} \vee 1$

$\equiv 1.$

Như vậy ta đã đưa công thức $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ về dạng chuẩn tuyển $\bar{p} \vee \bar{q} \vee q$ và đã rút gọn được công thức. Giá trị của công thức luôn luôn bằng 1.

2.2.3.3. Công thức đối ngẫu

Cho S(p, q,..., r) là công thức mệnh đề chỉ chứa các phép toán phủ định, hội và tuyển. Nếu trong công thức S(p, q,..., r) ta thay thế các phép hội bằng các phép tuyển và các phép tuyển bằng các phép hội thì nhận được một công thức mệnh đề gọi là công thức đối ngẫu của công thức S(p, q,..., r) và kí hiệu là $S^*(p, q,..., r)$.

Đối ngẫu của hội sơ cấp gọi là tuyển sơ cấp, đối ngẫu của dạng chuẩn tuyển gọi là dạng chuẩn hội.

Một công thức chỉ chứa các biến mệnh đề hoặc phủ định của nó với các phép toán hội, tuyển gọi là công thức rút gọn.

Ví dụ 9

a. Đối ngẫu của công thức $(\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r)$ là công thức

$(\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r)$

b. Đối ngẫu của công thức $(\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r})$ là công thức

$(\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee q \vee \bar{r})$

Từ định nghĩa công thức đối ngẫu suy ra định lý sau đây

Định lý 1.2 $\overline{S(p,q,...,r)} \equiv S^*(\bar{p}, \bar{q},..., \bar{r})$

Ví dụ 10

1. Tìm phủ định của công thức $(p \vee \bar{q}) \wedge r$.(1)

Trước hết ta tìm công thức đối ngẫu của (1) là $(p \wedge \bar{q}) \vee r$ (2).

Sau đó trong công thức (2) thay các mệnh đề bởi mệnh đề phủ định của nó ta có công thức $(\bar{p} \wedge q) \vee \bar{r}$.

Vậy $\overline{(p \wedge \bar{q})} \; r \equiv (\bar{p} \wedge q) \vee \bar{r}$.

Kết hợp với định lý 2.1 suy ra hệ quả

Hệ quả 1. Mọi công thức đều có dạng chuẩn hội tương đương

2. Mọi công thức đều có công thức rút gọn tương đương

2.2.4. Mệnh đề liên hợp

2.2.4.1. Mệnh đề liên hợp

Định nghĩa

Cho mệnh đề $p \Rightarrow q$ (p là giả thiết, q là kết luận) gọi là mệnh đề thuận. Các mệnh đề sau đây gọi là các mệnh đề liên hợp với mệnh đề đã cho

Mệnh đề đảo $q \Rightarrow p$

Mệnh đề phản $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$

Mệnh đề phản đảo $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

Ví dụ 11

Cho mệnh đề thuận: "*Nếu một số chia hết cho 9 thì chia hết cho 3*".

Ta có các mệnh đề liên hợp sau:

Mệnh đề đảo: "*Nếu một số chia hết cho 3 thì chia hết cho 9*"

Mệnh đề phản: "*Nếu một số không chia hết cho 9 thì không chia hết cho 3*"

Mệnh đề phản đảo: "*Nếu một số không chia hết cho 3 thì không chia hết cho 9*"

Ở đây, mệnh đề thuận và mệnh đề phản đảo đúng, mệnh đề phản và mệnh đề đảo là sai

Ví dụ 12

Cho mệnh đề thuận: "*Nếu một số có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì số đó chia hết cho 3*"

Ta có các mệnh đề liên hợp sau:

Mệnh đề đảo: "*Nếu một số chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của số đó chia hết cho 3*"

Mệnh đề phản: "*Nếu một số có tổng các chữ số không chia hết cho 3 thì số đó không chia hết cho 3*"

Mệnh đề phản đảo: "*Nếu một số không chia hết cho 3 thì số đó có tổng các chữ số không chia hết cho 3*"

Ở đây, tất cả các mệnh đề đều đúng.

Theo các đẳng thức cơ bản ta có $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ và $q \Rightarrow p \equiv \overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

Từ đó suy ra định lý sau đây

Định lý 1.3 1. Mệnh đề thuận tương đương logic với mệnh đề phản đảo

2. Mệnh đề phản tương đương logic với mệnh đề đảo

Trong ví dụ trên, mệnh đề thuận đúng nên mệnh đề phản đảo đúng. Mệnh đề phản sai nên mệnh đề đảo sai.

2.2.4.2. Điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ

Trong toán học khi ta đã chứng minh được mệnh đề $p \Rightarrow q$ là đúng thì ta nói rằng p là điều kiện đủ để có q và q là điều kiện cần để có p. Vì vậy mệnh đề toán học có dạng $p \Rightarrow q$ có thể phát biểu bằng nhiều cách khác nhau.

– Nếu p thì q;

– p kéo theo q;

– Từ p suy ra q;

– p là điều kiện đủ để có q;

– q là điều kiện cần để có p;

– Muốn có q thì có p là đủ;

– Muốn có p thì cần có q....

Khi mệnh đề $p \Rightarrow q$ và $q \Rightarrow p$ đều đúng thì $p \Leftrightarrow q$ đúng. Khi đó ta nói p là điều kiện cần và đủ để có q và q là điều kiện cần và đủ để có p

Mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ thường phát biểu như sau

– Nếu p thì q và ngược lại.

– Có p khi và chỉ khi có q

– Có p nếu và chỉ nếu q xảy ra.

– Điều kiện cần và đủ để có p là có q.

Ví dụ 13

Xét định lý: "*Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau*".

Ta thấy đây là mệnh đề đúng.

– Hai góc *đối đỉnh* là điều kiện đủ để chúng *bằng nhau* nhưng không cần phải *đối đỉnh* thì chúng mới *bằng nhau.*

– *Bằng nhau* là điều kiện cần để hai góc đó *đối đỉnh* nhưng không đủ.

Do vậy định lý trên có mệnh đề đảo là sai.

CÂU HỎI

1. Định nghĩa công thức mệnh đề, công thức bằng nhau.
2. Nêu các đẳng thức cơ bản.
3. Thế nào là phép biến đổi mệnh đề, mệnh đề liên hợp? Cho ví dụ.
4. Thế nào là điều kiện cần? điều kiện đủ ? điều kiện cần và đủ? Cho ví dụ.

2.3. LOGIC VỊ TỪ

2.3.1. Hàm mệnh đề

2.3.1.1. Hàm mệnh đề

Xét câu "*x là số tự nhiên chẵn* " ($x \in \mathbb{N}$). Ta thấy khi thay x bằng một số tự nhiên cụ thể thì ta được một mệnh đề.

Chẳng hạn:

– Với x = 1 ta có mệnh đề "*1 là số tự nhiên chẵn*" (là mệnh đề sai)

– Với x = 2 ta có mệnh đề "*2 là số tự nhiên chẵn*" (là mệnh đề đúng)...

Ta gọi câu "*x là số tự nhiên chẵn*" là một hàm mệnh đề một biến (hay vị từ một ngôi) xác định trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Từ ví dụ trên ta đi đến định nghĩa sau.

Định nghĩa

Cho tập hợp $M \neq \varnothing$. Hàm mệnh đề xác định trên tập hợp M là một câu chứa biến P(x) sao cho khi thay $x = a \in M$ ta nhận được một mệnh đề P(a. xác định.

Tập hợp M là miền xác định.

Ví dụ 1

a. Bất phương trình P(x): *"(x + 3)(x – 1) > 0"* là hàm mệnh đề một biến xác định trên tập $\mathbb{R}$.

Với x < –3 hoặc x > 1, P(x) là mệnh đề đúng.

Với –3 ≤ x ≤ 1, P(x) là mệnh đề sai.

b. Phương trình Q(x, y): "x + 2y = 3" là hàm mệnh đề hai biến xác định trên tập $\mathbb{R}^2$;

c. Phương trình R(x, y, z): "x + 2y– z + 3 = 0" là hàm mệnh đề ba biến xác định trên tập $\mathbb{R}^3$;

d. Mệnh đề được xem là hàm mệnh đề không biến.

2.3.1.2. Miền đúng của hàm mệnh đề

Định nghĩa

Cho P(x) là hàm mệnh đề xác định trên tập M.

Tập hợp $E_P = \{ x \in M \mid P(x) \text{ đúng} \}$ gọi là miền đúng của hàm mệnh đề P(x).

Ví dụ 2

a. Hàm mệnh đề P(x): "*x là số tự nhiên chẵn*" có miền đúng

$E_P = \{ 0, 2, 4, 6, 8,... \}$

b. Hàm mệnh đề Q(x): "*x là số nguyên tố*" có miền đúng

$E_q = \{ 2, 3, 5, 7, 11,... \}$

c. Hàm mệnh đề R(x): "$x \in \mathbb{R} \mid (x+3)(x–1) > 0$" có miền đúng

$E_R = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

Định nghĩa

Cho P(x) là hàm mệnh đề xác định trên tập M.

Hàm mệnh đề P(x) là hằng đúng trên tập M nếu ∀ a ∈ M, P(a. = 1. Tức là E_P =M;

Hàm mệnh đề P(x) là hằng sai trên tập M nếu ∀ a ∈ M, P(a. = 0. Tức là $E_P = \varnothing$;

Hàm mệnh đề P(x) là thực hiện được nếu ∃ a ∈ M, P(a. = 1. Tức là $E_P \neq \varnothing$.

Ví dụ 3

a. Hàm mệnh đề "$3x^2 + 2x - 5 = 0$" là thực hiện được trên tập $\mathbb{R}$;

b. Hàm mệnh đề "$x^2 + 1 = 0$" là hằng sai trên tập $\mathbb{R}$;

c. Hàm mệnh đề "$x^2 + 1 > 0$" là hằng đúng trên tập $\mathbb{R}$.

Định nghĩa

Cho P(x) và Q(x) là hai hàm mệnh đề xác định trên tập M. Ta nói rằng P(x) tương đương với Q(x), kí hiệu $P(x) \equiv Q(x)$ nếu $E_P = E_Q$

Ví dụ 4

Hai phương trình tương đương chính là hai hàm mệnh đề tương đương. Chẳng hạn: "$3x^2 + 2x - 5 = 0$" và "$3x^2 + x = 5 - x$" là hai hàm mệnh đề tương đương

2.3.2. Các lượng từ

2.3.2.1. Các lượng từ

Định nghĩa

Cho P(x) là hàm mệnh đề xác định trên tập M.

Mệnh đề *"$\forall x \in M$, P(x)"*, đọc là "*với mọi $x \in M$ có tính chất P(x)",* là mệnh đề đúng nếu $E_P = M$ và sai trong các trường hợp còn lại. Kí hiệu "$\forall$" gọi là lượng từ phổ dụng.

Mệnh đề "$\exists$ x $\in$ M, P(x)", đọc là "có x $\in$ M có tính chất P(x)", là mệnh đề đúng nếu $E_P \neq \varnothing$ và sai trong các trường hợp còn lại. Kí hiệu "$\exists$" gọi là lượng từ tồn tại.

Chú ý Trong các mệnh đề "$\forall x \in M$, P(x)" và "$\exists x \in M$, P(x)" biến x gọi là biến bị ràng buộc.

Ví dụ 5

a. "$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 > 0$" là mệnh đề sai

b. "$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$" là mệnh đề đúng

c. "$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 > 0$" là mệnh đề đúng.

d. "$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 = 0$" là mệnh đề sai.

Định lý 1.3 $\overline{\underset{x\in M}{\forall} P(x)} = \underset{x\in M}{\exists} \overline{P(x)}$, $\overline{\underset{x\in M}{\exists} P(x)} = \underset{x\in M}{\forall} \overline{P(x)}$

Chứng minh

Giả sử $\overline{\underset{x\in M}{\forall} P(x)}$ đúng $\Rightarrow \underset{x\in M}{\forall} P(x)$ sai $\Rightarrow \exists x \in M, P(x)$ sai $\Rightarrow \underset{x\in M}{\exists} \overline{P(x)}$ đúng

Tương tự chứng minh hệ thức thứ hai.

Ví dụ 6

a. Cho mệnh đề: "mọi người đều cho rằng các trẻ hiện nay có chiều cao cao hơn trước".

Phủ định của mệnh đề này là mệnh đề: " có người cho rằng các trẻ hiện nay có chiều cao không cao hơn trước".

b. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$" là mệnh đề

"$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$"

2.3.2.2. Lượng từ và hàm mệnh đề nhiều biến

Với hàm mệnh đề hai biến P(x, y) xác định trên tập M nếu ta tác động một trong hai lượng từ $\forall$ hoặc $\exists$ lên P(x, y) thì nhận được hàm mệnh đề trong đó một biến tự do, một biến ràng buộc. Nếu tác động hai lần các lượng từ $\exists$ hoặc $\forall$ lên hai biến x, y thì nhận được một mệnh đề.

Ví dụ 7

a. "$\forall x \in \mathbb{R}, x > y$" là hàm mệnh đề có biến ràng buộc x và biến tự do y;

b. "$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x > y$" là mệnh đề sai;

c. "$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x > y$" là mệnh đề đúng;

d. Các hằng đẳng thức là các mệnh đề phổ dụng đúng

Chẳng hạn "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$"

"$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x + y)^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$".

CÂU HỎI

1. Định nghĩa hàm mệnh đề, miền đúng và các hàm hằng?
2. Định nghĩa các lượng từ?

2.4. LUẬT LOGIC VÀ QUY TẮC SUY LUẬN

2.4.1. Luật logic

2.4.1.1. Định nghĩa

Công thức S(p, q,..., r) nhận giá trị 1 với mọi bộ giá trị chân lí có thể có của các biến mệnh đề gọi là hằng đúng hay luật logic và kí hiệu là

$\models S(p, q,..., r)$

Công thức S(p, q,..., r) nhận giá trị 0 với mọi bộ giá trị chân lí có thể có của các biến mệnh đề gọi là hằng sai hay là mâu thuẫn.

Định lý 4.1

Cho các công thức S(p, q,..., r) và T(p, q,..., r) cùng chứa các biến p, q,..., r.

$\models S(p, q,..., r) \Leftrightarrow T(p, q,..., r)$ khi và chỉ khi $S(p, q,..., r) \equiv T(p, q,..., r)$

Chứng minh

$\models S(p, q,..., r) \Leftrightarrow T(p, q,..., r)$

khi và chỉ khi $(S(p, q,..., r) \Leftrightarrow T(p, q,..., r)) \equiv 1$

khi và chỉ khi $\forall (p, q,..., r), S(p, q,..., r) = T(p, q,..., r)$

khi và chỉ khi $S(p, q,..., r) \equiv T(p, q,..., r)$ $\triangleright$

Ví dụ 1

Đẳng thức $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

suy ra luật $\models (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

2.4.1.2. Một số luật thường dùng

1. Luật bài trung $\models p \vee \overline{p}$
2. Luật mâu thuẫn $\models \overline{p \wedge \overline{p}}$
3. Luật đồng nhất $\models p \Rightarrow p$
4. Luật phản đảo $\models (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
5. Luật De Morgan $\models \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

$\models \overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$

Ta có thể chứng minh bằng cách lập bảng giá trị chân lí.

Chẳng hạn chứng minh luật phản đảo:

$$\models (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

2.4.2. Quy tắc suy luận

Suy luận diễn dịch: Suy luận là rút ra một mệnh đề mới từ một hay nhiều mệnh đề đã có.

Phân tích các suy luận trong chứng minh toán học, người ta thấy mỗi chứng minh bao gồm một số hữu hạn bước suy luận đơn giản. Trong mỗi bước suy luận đơn giản đó, ta đã "ngầm" vận dụng một quy tắc suy luận tổng quát để từ các mệnh đề đã được thừa nhận là đúng (tiên đề, định lý, định nghĩa, giả thiết) có thể rút ra một mệnh đề mới. Người ta gọi các mệnh đề xuất phát đã được thừa nhận là đúng là các tiền đề, còn mệnh đề mới được rút ra (nhờ vận dụng các quy tắc suy luận tổng quát) gọi là hệ quả lôgic của các tiền đề. Phép suy luận như thế gọi là suy luận diễn dịch hay gọi tắt là suy diễn.

Định nghĩa: Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ là những công thức. Nếu tất cả các hệ giá trị chân lý của các biến mệnh đề có mặt trong các công thức đó làm cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nhận giá trị 1 cũng đồng thời làm cho B nhận giá trị 1, tức là $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ là một công thức hằng đúng, thì ta gọi B là hệ quả lôgic của $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó ta cũng nói rằng có một quy tắc suy luận từ các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tới hệ quả lôgic B của chúng.

Quy tắc suy luận đó được ký hiệu là:

$$\frac{A_1, A_1, \ldots, A_n}{B}.$$

Một số quy tắc suy luận thường dùng:

1) $\dfrac{p}{p \vee q}$ (Quy tắc cộng).

2) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ (Quy tắc rút gọn).

3) $\dfrac{p, p \Rightarrow q}{q}$ (Quy tắc kết luận - Modus ponens).

4) $\dfrac{p \Rightarrow q, \overline{q}}{\overline{p}}$ (Quy tắc kết luận ngược - Modus tollens).

5) $\dfrac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$ (Quy tắc tam đoạn luận).

6) $\dfrac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}$ (Quy tắc đưa tương đương vào).

7) $\dfrac{p \vee q, \overline{p}}{q}$ (Quy tắc tách tuyển).

8) $\dfrac{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r}{p \vee q \Rightarrow r}$ (Quy tắc tách tuyển giả thiết).

9) $\dfrac{p \Rightarrow q, p \Rightarrow r}{p \Rightarrow q \wedge r}$ (Quy tắc hội kết luận).

10) $\dfrac{\overline{q} \Rightarrow \overline{p}}{p \Rightarrow q}$ (Quy tắc phản đảo).

11) $\dfrac{\overline{p} \Rightarrow q, \overline{p} \Rightarrow \overline{q}}{p}$ (Quy tắc phản chứng).

Ví dụ 2

1) Cho: Nếu trời mưa (p) thì sân ướt (q) (đúng)
Trời đang mưa (đúng)
Kết luận: Sân ướt (đúng).

2) Cho: Nếu hai góc đối đỉnh (p) thì bằng nhau (q) (đúng)
$\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ không bằng nhau (đúng)
Kết luận: $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ không đối đỉnh (đúng).

3) Cho: Mọi hình vuông đều là hình thoi ($p \Rightarrow q$) (đúng)
Mọi hình thoi có các đường chéo vuông góc ($q \Rightarrow r$) (đúng)
Kết luận: Mọi hình vuông đều có các đường chéo vuông góc ($p \Rightarrow r$) (đúng).

Suy luận nghe có lý: Suy luận nghe có lý là suy luận không theo một quy tắc suy luận tổng quát nào để từ những tiền đề đã có, rút ra được một kết luận xác định. Nếu các tiền đề đều đúng thì kết luận rút ra không chắc chắn đúng, mà chỉ có tính chất dự đoán, giả thuyết.

Trong toán học có hai kiểu suy luận nghe có lý thường dùng, đó là

– Phép quy nạp không hoàn toàn,

– Phép tương tự.

Ví dụ 3

1) Từ định lý trong hình học phẳng: "Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau", chúng ta nêu ra một "dự đoán": "Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau".

Đây là một thí dụ về phép suy luận bằng tương tự.

2) Các số $2^{2^0}+1,\ 2^{2^1}+1,\ 2^{2^2}+1,\ 2^{2^3}+1,\ 2^{2^4}+1$ là những số nguyên tố. Kết luận: với mọi số tự nhiên n, số $2^{2^n}+1$ là số nguyên tố.

Đây là lối suy luận quy nạp không hoàn toàn đã nêu lên bởi Fermat (1601-1665) sau khi đã kiểm nghiệm với các số $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Nhưng sau đó Euler đã chỉ ra rằng với $n = 5$, khẳng định này không đúng, nghĩa là $2^{2^5}+1$ không là số nguyên tố.

3) $6 = 3+3,\ 8 = 3+5,\ 10 = 5+5,\ 12 = 5+7, \ldots$. Kết luận: mọi số nguyên dương chẵn lớn hơn 4 là tổng của hai số nguyên tố.

Mệnh đề này mang tên là bài toán Goldbach. Đây là một trong nhiều khẳng định trong toán học chưa được chứng minh.

4) Phương trình $x^3+y^3=z^3$ không có nghiệm nguyên, phương trình $x^4+y^4=z^4$ không có nghiệm nguyên. Kết luận: phương trình $x^n+y^n=z^n$ không có nghiệm nguyên với mọi số nguyên $n>2$.

Mệnh đề này được nêu ra bởi Fermat năm 1637, gọi là "định lý cuối cùng của Fermat". Mãi đến tháng 5 năm 1995, mệnh đề này mới được hoàn toàn chứng minh xong bởi nhà toán học người Anh tên là Wiles.

Toán học là khoa học của suy luận diễn dịch. Tất cả các vấn đề trong toán học chỉ được trình bày bằng các suy luận diễn dịch. Tuy nhiên, trong quá trình phát minh, sáng tạo toán học, lý luận diễn dịch gắn chặt với các suy luận nghe có lý. Ta dùng quy nạp không hoàn toàn hay tương tự để nêu ra các giả thuyết. Sau đó mới chứng minh các giả thuyết này bằng diễn dịch.

Toán học là khoa học của suy luận diễn dịch. Tất cả các vấn đề trong toán học chỉ được trình bày bằng các suy luận diễn dịch. Tuy nhiên, trong quá trình phát minh, sáng tạo toán học, lý luận diễn dịch gắn chặt với các suy luận nghe có lý. Ta dùng quy nạp không hoàn toàn hay tương tự để nêu ra các giả thuyết. sau đó mới chứng minh các giả thuyết này bằng diễn dịch.

2.5. Các phương pháp chứng minh

Chứng minh là gì? Trong suy luận diễn dịch, nếu từ các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ta rút ra kết luận B bằng cách vận dụng những quy tắc suy luận tổng quát thì ta nói B là kết luận lôgic của các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và suy luận đó là hợp lôgic. Nếu tất cả các tiền đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đều đúng thì ta gọi kết luận lôgic B là một kết luận chứng minh và gọi suy luận đó là một chứng minh.

Phân tích các chứng minh toán học ta thấy mỗi chứng minh gồm một số hữu hạn bước, mỗi bước là một suy luận diễn dịch trong đó ta vận dụng một quy tắc suy luận tổng quát. Như vậy, một chứng minh toán học gồm ba bộ phận cấu thành:

1) Luận đề, tức là mệnh đề cần chứng minh.

2) Luận cứ, tức là những mệnh đề được thừa nhận (định nghĩa, tiền đề, định lý, giả thiết) được lấy làm tiền đề trong mỗi suy luận.

3) Luận chứng, tức là những quy tắc suy luận tổng quát được vận dụng trong mỗi bước suy luận của chứng minh.

Phương pháp chứng minh trực tiếp: Khi ta chứng minh mệnh đề B bằng cách vạch rõ B là kết luận lôgic của những tiền đề đúng $A_1, A_2, \ldots, A_n$, nghĩa là B là một kết luận chứng minh thì ta nói là đã chứng minh trực tiếp mệnh đề B.

Ví dụ 1

Hãy chứng minh trực tiếp mệnh đề: "Nếu n là một số lẻ thì n^2 cũng là một số lẻ".

Giả sử rằng giả thiết của mệnh đề kéo theo này là đúng, tức là n là một số lẻ. Khi đó $n = 2k+1$, với k là một số nguyên. Từ đó suy ra $n^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Do đó n^2 là một số lẻ.

Phương pháp chứng minh tìm phản thí dụ: Giả sử ta cần chứng minh mệnh đề p sai. Nếu ta tìm được mệnh đề q, trường hợp đặc biệt của p là sai. Khi đó $\overline{q}$ đúng và $p \Rightarrow q$ là đúng. Do đó theo quy tắc kết luận ngược thì $\overline{p}$ là đúng. Từ đó p là sai.

Ví dụ 2

Cho m và n là những số khác không bất kỳ. Chứng minh rằng $n+m < nm$ là không đúng. Chỉ cần lấy $n = m = 1$ thì $1+1 = 2 > 1.1$.

Phương pháp chứng minh phản đảo: Giả sử ta cần chứng minh $p \Rightarrow q$. Nếu ta chứng minh được $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ thì theo quy tắc phản đảo, ta có $p \Rightarrow q$ đúng. Như vậy, để chứng minh $p \Rightarrow q$, ta có thể chuyển sang chứng minh $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ là đủ.

Ví dụ 3

Cho a là một số hữu tỉ khác 0. Chứng minh rằng nếu b là một số vô tỉ thì ab cũng là một số vô tỉ.

Ta viết $a = \frac{m}{n}$, với m, n là hai số nguyên khác 0. Nếu ab là số hữu tỉ thì ta có thể viết $ab = \frac{k}{l}$ với k, l là hai số nguyên và $l \neq 0$. Khi đó $b = \frac{ab}{a} = \frac{k/l}{m/n} = \frac{kn}{lm}$ và suy ra b là một số hữu tỉ.

Phương pháp chứng minh phản chứng: Cơ sở lôgic của phương pháp chứng minh phản chứng là như sau: muốn chứng minh mệnh đề p là đúng, ta giả thiết p là sai, tức là $\overline{p}$ là đúng. Sau đó ta chứng minh rằng $\overline{p} \Rightarrow q$ là đúng và $\overline{q}$ là đúng. Do đó theo quy tắc phản chứng thì p là đúng. Điều này dẫn đến mâu thuẫn (luật bài trung).

Ví dụ 4

Chứng minh rằng ước số tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên lớn hơn 1 là một số nguyên tố.

Giả sử k là ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của số tự nhiên n $(n > 1)$ và k không là số nguyên tố. Do đó tồn tại ước số m của k sao cho $1 < m < k$. Nhưng khi đó m cũng là một ước số của n. Điều này mâu thuẫn với k là ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của n.

Phương pháp chứng minh xét tất cả các trường hợp: Trong toán học, để chứng minh mệnh đề nào đó là đúng, ta có thể xét nó trong tất cả các trường hợp có thể có.

Ví dụ 5

Chứng minh rằng tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 3.

Với n là một số nguyên, ta viết $n = 3q + r$ với q là một số nguyên và $r = 0, 1, 2$.

a) $r = 0$: $n = 3q$ hay n chia hết cho 3, khi đó $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3.

b) $r = 1$: $n = 3q + 1$ hay $n + 2 = 3(q + 1)$ hay $n + 2$ chia hết cho 3, khi đó $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3.

c) $r = 2$: $n = 3q + 2$ hay $n + 1 = 3(q + 1)$ hay $n + 1$ chia hết cho 3, $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3.

Phương pháp chứng minh quy nạp:

Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với n = 1.

Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì n = k ≥ 1 (giả thiết này được gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k + 1.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên n ≥ p (p là một số tự nhiên đúng với n = p, ở bước 2), ta giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì n = k ≥ p và chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k + 1.

Trường hợp thường gặp nhất là n = 1.

Ví dụ 6 Chứng minh rằng với $n \in N^*$ ta có:
$n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3

Đặt $S_n = n^3 + 3n^2 + 5n$. Với n = 1 tá có $1^3 + 3.1^2 + 5.1 = 9 \vdots 3$.

Vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là $S_k = k^3 + 3k^2 + 5k \vdots 3$.

Ta chứng minh (1) đúng với n = k +1 tức là chứng minh $S_{k+1} \vdots 3$.

Thật vậy ta có: $S_{k+1} = (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 5(k + 1)$
$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5$
$= k^3 + 3k^2 + 5k + 3(k^2 + 3k + 3) \vdots 3$ (vì $S_k \vdots 3$)

Vậy $S_n \vdots 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Vận dụng các kiến thức đã học vào các dạng bài tập sau:

– Thế nào là mệnh đề, các phép toán mệnh đề và tìm giá trị chân lí của các mệnh đề đó.

– Chứng minh đẳng thức, chứng minh công thức là luật logic.

– Tìm miền đúng của hàm mệnh đề, các phép toán trên hàm mệnh đề, lượng từ.

– Một số bài tập vận dụng logic mệnh đề vào môn toán.

LOGIC MỆNH ĐỀ

1. Cho tập hợp $E = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$

và tập $H = \{x \in \mathbb{R} | \frac{f(x)}{g(x)} = 0\}$. Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

a. $H = E \cup F$ b. $H = E \cap F$ c. $H = E \setminus F$ d. $H = F \setminus E$

2. Diễn đạt bằng ký hiệu các mệnh đề sau:

a. 3 bé hơn 5 và 5 bé hơn 10

b. 3 bé hơn 5 nhưng 5 không bé hơn 10

c. 3 không bé hơn 5 mà 5 bé hơn 10

d. 3 không bé hơn 5 mà 5 cũng không bé hơn 10

3. Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

a. Tập hợp số tự nhiên là tập hợp hữu hạn;

b. Trẻ mầm non 3-4 tuổi đã có thể nhận biết và gọi đúng tên hình vuông, hình tròn;

c. Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

d. Hình vuông cũng là hình chữ nhật;

e. Số 56 chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 3

4. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai:

a. "$4 - x < -2 \Leftrightarrow x^2 < 4$" b. "$\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$"

c. "$\sqrt{23} \times 5 < 2\sqrt{23} \Rightarrow 2 < 5$" d) "$-1 < x < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1$"

5. Hãy đưa các mệnh đề dưới đây về dạng hội (hoặc tuyển) của các mệnh đề đơn giản và hãy tìm giá trị chân lý của mệnh đó:

a. $|-2| > -1$ b. $|3| < 4$ c. $\sqrt{2} \leq 2$

6. Lập mệnh đề phủ định của những mệnh đề trong bài 4.

7. Cho hai mệnh đề p: 4 không là hợp số, q: $\pi < 4$

Mệnh đề nào sau đây sai:

a. $p \Rightarrow q$ b. $\overline{p} \Leftrightarrow q$ c. $\overline{q} \Rightarrow p$ d. $\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$

8. Cho các mệnh đề

p = "45 chia hết cho 15"

q = "45 chia hết cho 3 và cho 5"

Hãy phát biểu thành lời các mệnh đề sau và tìm giá trị chân lý của các mệnh đề đó.

a. $p \Rightarrow q$ b. $p \Rightarrow \overline{q}$

c. $\overline{p} \Rightarrow q$ d. $\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$

e. $q \Rightarrow p$ f. $q \Rightarrow \overline{p}$

g. $\overline{q} \Rightarrow p$ h. $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

9. Viết các mệnh đề sau đây dưới dạng $\Rightarrow$ (nếu... thì). Trong các mệnh đề đó mệnh đề nào có thể viết dưới dạng mệnh đề tương đương $\Leftrightarrow$? Hãy phát biểu và tìm giá trị chân lý của các mệnh đề đó.

a. Tổng các góc của tam giác ABC bằng 180^0.

b. Mọi hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau.

c. Một số chia hết cho 5 thì có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5.

d. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

10. Biết mệnh đề $p \Rightarrow q$ đúng, mệnh đề $p \wedge q$ sai, mệnh đề $p \vee \overline{q}$ sai. Có thể nói gì về giá trị chân lý của các mệnh đề p, q?

11. a. Tìm giá trị của $p \Rightarrow q$ biết rằng $p \wedge \overline{q}$ đúng

b. Hỏi tương tự khi biết $p \vee \overline{q}$ sai

12. Cho các mệnh đề

p = "Tứ giác ABCD là hình bình hành"

q = "Tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau từng đôi một"

Hãy diễn đạt thành lời các mệnh đề sau và xác định giá trị chân lý của mệnh đề đó.

a. $p \Leftrightarrow q$ b. $p \Leftrightarrow \overline{q}$

c. $\overline{p} \Leftrightarrow q$ d. $\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$

13. Cho biết mệnh đề $p \Rightarrow q$ là mệnh đề đúng, mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ là mệnh đề sai. Có thể nói gì về giá trị chân lý của mệnh đề $q \Rightarrow p$? p? q?

LOGIC VỊ TỪ

14. Tìm miền đúng của các hàm mệnh đề xác định trên tập số tự nhiên sau:

a. x là số chẵn; b. x chia hết cho 5;

c. x chia 5 dư 4; d. $x^2 + 3x - 4 = 0$.

15. Tìm miền đúng của các hàm mệnh đề xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ sau đây

a. $2x + 5 > 1 - 4x$; b. $(x-2).(2x^2 - 3x + 1) = 0$;

c. $x^2 + 3x - 4 \leq 0$; d. $|2x + 1| > 0$.

16. Trong các mệnh đề sau đây, hãy chọn mệnh đề đúng:

a. $\exists x \in \mathbb{R}, x_2 - 3x + 2 = 0;$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = x;$

c. $\forall x \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0;$

d. $\forall x,y \in \mathbb{R}, x_2 - 2xy + y_2 = (x - y)_2$

CÔNG THỨC

17. Lập bảng giá trị của công thức:

a. $\overline{p \wedge q} \Rightarrow q \wedge r$

b. $\Rightarrow \overline{(p \Rightarrow r) \quad (q \quad r)}$

c. $(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$

18. Điền đúng (Đ), sai (S) vào ô trống:

a. Công thức $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ luôn luôn nhận giá trị là 1

☐

b. Công thức $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow \overline{p \vee q} \vee \overline{p \vee r}$ luôn luôn nhận giá trị là 1

☐

c. Công thức $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ luôn luôn nhận giá trị là 0

☐

19. Hãy biến đổi công thức sau về dạng đơn giản nhất

a. $(p \vee q \Rightarrow p \vee q) \wedge q$

b. $\overline{p \wedge q} \wedge (p \Rightarrow \overline{p})$

c. $(p \Rightarrow \overline{q}) \vee \overline{p \vee q}$

20. Chứng minh các đẳng thức sau bằng hai cách (biến đổi đồng nhất, lập bảng GTCL)

a. $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ b. $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

c. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ d. $p \wedge q \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

e. $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ g. $p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$

21. Hãy phát biểu mệnh đề sau dưới các dạng mệnh đề liên hợp của chúng và tìm giá trị chân lý của các mệnh đề đó:

a. Nếu một số chia hết cho 6 thì chia hết cho 3;

b. Nếu một tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì nó là hình thoi;

c. Nếu mỗi chú thỏ đều được ăn một củ cà rốt mà không thừa củ cà rốt nào thì số thỏ và số củ cà rốt là bằng nhau.

22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo sai:

a. Nếu tam giác ABC cân thì tam giác có 2 cạnh bằng nhau;

b. Nếu x chia hết cho 45 thì x chia hết cho 5 và 9;

c. Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì AB//CD;

d. Nếu một vật có kích thước to hơn thì nặng hơn.

23. Điền các cụm từ "Điều kiện cần", "Điều kiện đủ", "Điều kiện cần và đủ" vào chỗ trống cho thích hợp:

a. Để tứ giác T là hình vuông,… là nó có 4 cạnh bằng nhau;

b. Để ab>0,… là cả 2 số a và b đều dương.

LUẬT LOGIC

24. Chứng minh các công thức sau đây là những công thức hằng đúng, sau đó hãy viết chúng dưới dạng luật:

a. $\overline{q} \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$; b. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$; c. $p \wedge (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow q$.

25. Chứng minh các luật logic sau:

a. $\models p \Rightarrow \overline{\overline{p}}$; b. $\models p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;

c. $\models p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$; d. $\models (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$;

e. $\models (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$; g. $\models p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

h. $\models (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$; i. $\models (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

k. $\models p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ n. $\models (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}}$

26. Trong buổi học môn tạo hình, ba bạn Cúc, Đào, Hồng làm ba bông hoa cúc, đào, hồng. Bạn làm hoa hồng nói với bạn Cúc: " Thế là trong ba chúng ta chẳng ai làm hoa trùng với tên mình cả ". Hỏi ai đã làm hoa nào?

CHƯƠNG 3: CƠ SỞ TOÁN HỌC CỦA CÁC YẾU TỐ HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG Ở TIỂU HỌC

3.1. Phương pháp tiên đề trong xây dựng lí thuyết môn Hình học

3.1.1. Các khái niệm hình học cơ bản

Trong hình học, cũng như các ngành khoa học khác, mỗi khi đưa ra một khái niệm mới (có thể một thuật ngữ hay một kí hiệu) người ta phải định nghĩa nó thông qua những khái niệm đã biết trước đó. Khi đưa ra khái niệm trước đó, người ta lại phải định nghĩa nó thông qua các khái niệm trước đó nữa,...Cứ như thế, rõ ràng là không thể định nghĩa được mãi cho tất cả các khái niệm hình học. Vì vậy, người ta phải đưa ra một số khái niệm cơ bản ban đầu không định nghĩa.

Khái niệm cơ bản là những khái niệm không được định nghĩa, để hiểu các khái niệm này, người ta mô tả nó thông qua các hình ảnh, biểu tượng. Hệ thống các khái niệm cơ bản trong hình học bao gồm:

+ Điểm;

+ Đường thẳng;

+ mặt phẳng;

+ Quan hệ liên thuộc (điểm thuộc đường thẳng, điểm thuộc mặt phẳng);

+ Quan hệ giữa ba điểm thẳng hàng (điểm nằm giữa hai điểm kia)

+ Quan hệ tương đẳng (bằng nhau):

3.1.2. Hệ thống các tiên đề

Tiên đề là những mệnh đề toán học mà tính đúng đắn của nó được mặc nhiên thừa nhận mà không cần chứng minh. Sau đây là hệ thống một số tiên đề hình học:

Tiên đề 1. Qua hai điểm khác nhau trong mặt phẳng, xác định được một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Tiên đề 2. Mỗi đường thẳng chứa ít nhất hai điểm. Tồn tại ba điểm không cùng thuộc một đường thẳng.

Tiên đề 3. Qua ba điểm không thẳng hàng xác định được một và chỉ một mặt phẳng đi qua điểm đó.

Tiên đề 4. Nếu hai điểm A, B đều thuộc đường thẳng a thì đường thẳng đi qua hai điểm A, B trùng với đường thẳng a.

Tiên đề 5. Trong ba điểm thẳng hàng, có một và chỉ một điểm ở giữa hai điểm kia.

Tiên đề 6. Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng ta dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Tiên đề 7. Mỗi đoạn thẳng có một độ dài là một số thực dương. Nếu điểm C ở giữa hai điểm A, B thì độ dài đoạn thẳng AB bằng tổng độ dài các đoạn thẳng AC và CB.

Tiên đề 8. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một điểm chung khác nữa.

3.1.3. Hệ thống định nghĩa các khái niệm hình học

Từ các khái niệm cơ bản, người ta định nghĩa những khái niệm mới và như vậy: hệ thống khái niệm hình học ngày càng phong phú hơn.

3.1.4. Các định lí và tính chất hình học

Từ các định nghĩa, tiên đề hình học, vận dụng vào các suy luận logic, người ta chứng minh để rút ra các định lí và tính chất hình học.

Từ các định nghĩa, tiên đề, định lí và tính chất đã được chứng minh ta tiếp tục định nghĩa các khái niệm mới, chứng minh các tính chất mới,...làm cho nội dung môn hình học ngày một phong phú hơn.

3.2. Định nghĩa các khái niệm hình học

3.2.1. Định nghĩa các hình học

Định nghĩa hình hình học

Mỗi tập hợp H gồm các điểm trong mặt phẳng hoặc trong không gian, ta gọi là một hình hình học. Nếu H là tập các điểm trong mặt phẳng thì ta gọi H là hình phẳng, nếu H là tập hợp các điểm trong không gian thì ta gọi H là hình không gian. Nếu H là tập rỗng thì ta gọi H là hình rỗng.

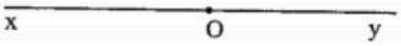
Dưới đây ta hệ thống các định nghĩa về các hình hình học đã được học trong chương trình môn Toán ở trường phổ thông:

Định nghĩa các hình phẳng

1. Định nghĩa đoạn thẳng: **Đoạn thẳng AB** là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B.

Đoạn thẳng AB còn gọi là đoạn thẳng BA. Hai điểm A và B gọi là các đầu mút của đoạn thẳng AB.

2. Định nghĩa tia: Cho đường thẳng xy và một điểm O trên đường thẳng đó. Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng xy bị chia ra bởi điểm O được gọi là một ***tia*** gốc O (hay còn gọi là một nửa đường thẳng gốc O).



Trong hình trên ta có tia Ox và tia Oy cùng chung gốc O.

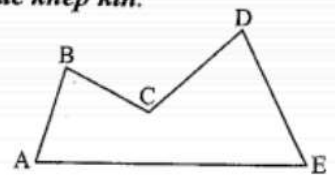
Ta gọi Ox và Oy là ***hai tia đối nhau*** (hay nói cách khác, hai tia đối nhau là hai tia cùng chung một gốc và chúng tạo thành một đường thẳng).

3. Định nghĩa đường gấp khúc (đơn, tự cắt, khép kín)

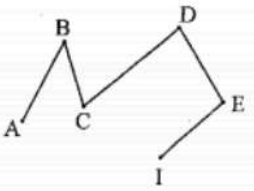
Cho một dãy n điểm phân biệt $\{A_1;A_2; A_3; ...; A_n\}$. Hình tạo bởi dãy các đoạn thẳng $\{A_1A_2; A_2A_3; A_3A_4; ...; A_{n-1}A_n\}$ sao cho không có hai đoạn thẳng liên tiếp nhau nào cùng nằm trên một đường thẳng ta sẽ gọi là một **đường gấp khúc**, kí hiệu là $A_1A_2A_3...A_n$ với điểm **đầu là A_1** và **điểm cuối là A_n**.

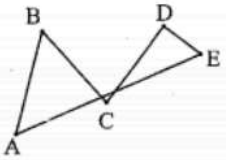
Các điểm A_i gọi là các ***đỉnh*** và các đoạn A_iA_{i+1} với $i = 1, 2, ..., n - 1$ gọi là các ***cạnh*** (hay ***đốt***) của đường gấp khúc đó.

Nếu đường gấp khúc có điểm đầu trùng với điểm cuối ($A_n \equiv A_1$) thì ta gọi là ***đường gấp khúc khép kín***.

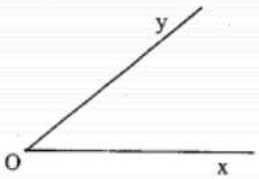


Nếu hai cạnh bất kì của đường gấp khúc có nhiều nhất một điểm chung (nếu có một điểm chung thì điểm chung đó phải là đỉnh của đường gấp khúc) thì ta gọi là ***đường gấp khúc đơn***, ngược lại ta gọi là ***đường gấp khúc tự cắt***.

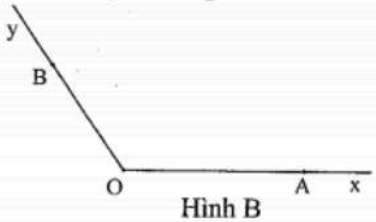




4. Định nghĩa góc: **Góc** là một hình gồm hai tia có chung gốc. Gốc chung của hai tia gọi là ***đỉnh***, hai tia gọi là các ***cạnh*** của góc đó.



Hình A



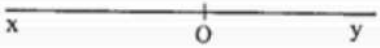
Hình B

Trên hình A: Điểm O gọi là đỉnh, hai tia Ox và Oy gọi là cạnh của góc xOy.

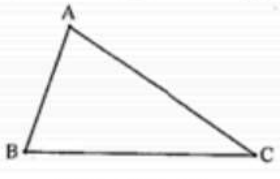
Ta viết: góc xOy hoặc góc yOx hoặc góc O và dùng các kí hiệu tương ứng là $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOx}$, $\widehat{O}$.

Góc xOy trong hình B còn gọi là góc AOB hoặc góc BOA.

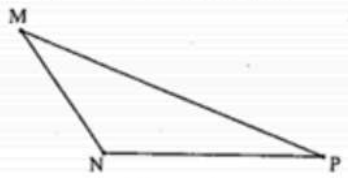
Góc có hai cạnh là hai tia đối nhau gọi là ***góc bẹt***.



5. Định nghĩa tam giác: ***Tam giác ABC*** là hình gồm ba đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, kí hiệu là ΔABC, trong đó A, B, C gọi là các ***đỉnh***; AB, BC, CA gọi là các ***cạnh*** và các góc BAC, góc ABC, góc ACB gọi là các ***góc*** của tam giác đó.



Tam giác ABC

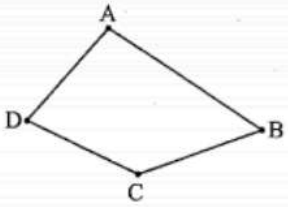


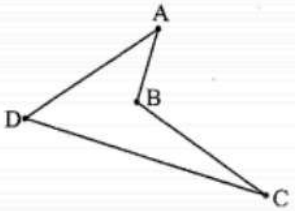
Tam giác MNP

6. Định nghĩa tứ giác, hình chữ nhật, hình vuông, hình bình hành, hình thoi, hình thang

Tứ giác ABCD là một hình gồm bốn đoạn AB, BC, CD và DA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Các điểm A, B, C, D gọi là các ***đỉnh***, các đoạn thẳng AB, BC, CD và DA gọi là các ***cạnh*** của tứ giác đó.

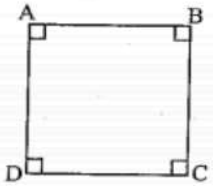




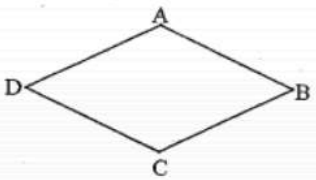
Hình chữ nhật là hình tứ giác có bốn góc vuông.

Hình chữ nhật ABCD có các góc A, góc B, góc C và góc D đều vuông; hai cạnh AB và CD gọi là chiều dài, AD và BC gọi là chiều rộng của hình chữ nhật đó.

Hình vuông là hình tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

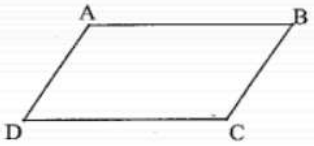


Hình vuông ABCD có các góc A, góc B, góc C và góc D đều vuông; các cạnh AB, BC, CD và AD đều bằng nhau.

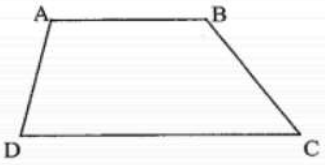


Hình thoi ABCD có bốn cạnh AB, BC, CD và AD đều bằng nhau.

Hình bình hành là hình tứ giác có các cặp cạnh đối song song.



Tứ giác ABCD trong hình sau đây có AB song song với CD được gọi là hình thang. Cạnh AB gọi là đáy nhỏ, cạnh CD gọi là đáy lớn và các cạnh AD, BC gọi là cạnh bên của hình thang đó.



Hình thang là hình tứ giác có hai cạnh đối song song.

7. Định nghĩa đa giác, đa giác lồi, lõm

Hình đa giác n cạnh (hay còn gọi là ***n – giác***) là hình tạo bởi một đường gấp khúc khép kín có n đoạn.

Trong phần sau đây ta chỉ xét các đa giác tạo thành từ các đường gấp khúc đơn.

Khi n = 3 ta gọi là hình tam giác;

Khi n = 4 ta gọi là hình tứ giác;

Khi n = 5 ta gọi là hình ngũ giác;

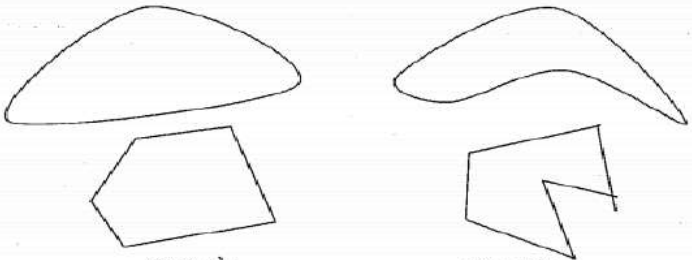
Khi n = 6 ta gọi là hình lục giác;

Khi n = 8 ta gọi là hình bát giác;

...

8. Định nghĩa hình lồi, hình lõm

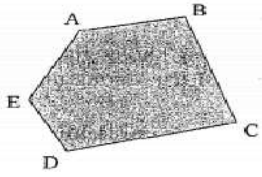
Cho $\mathcal{H}$ là một hình hình học. Ta gọi hình $\mathcal{H}$ là hình lồi nếu với hai điểm A, B bất kì thuộc hình $\mathcal{H}$, đoạn thẳng nối hai điểm A, B luôn nằm trọn trong hình $\mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{H}$ không phải là hình lồi thì ta gọi H là hình lõm.



Hình lồi Hình lõm

9. Định nghĩa miền trong, miền ngoài của đa giác

Cho $\mathcal{D}$ là một hình đa giác trong mặt phẳng (P). Tập hợp P – $\mathcal{D}$ được chia thành hai phần rời nhau: một trong hai phần đó có thể chứa trọn vẹn một đường thẳng, ta gọi là ***miền ngoài của đa giác*** $\mathcal{D}$; phần còn lại (không thể chứa bất kì một đường thẳng nào) ta gọi là ***miền trong của đa giác đó***.



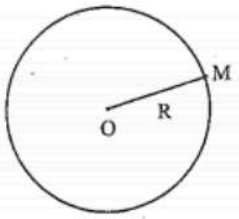
Phần tô đậm là miền trong, phần còn lại là miền ngoài của ngũ giác ABCDE.

Hình đa giác có miền trong tạo thành một hình lồi được gọi là **đa giác lồi**.

Ta sẽ chỉ xét các hình đa giác đơn lồi.

10. Định nghĩa đường tròn, hình tròn

Cho R là số thực dương và O là điểm cố định trong mặt phẳng (P).



a) Tập hợp $\mathscr{C}$ các điểm M trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ M tới O luôn không đổi và bằng R gọi là ***đường tròn tâm O bán kính R*** và kí hiệu là $\mathscr{C}$(O; R).

b) Tập hợp $\mathscr{K}$ các điểm M trong mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ M tới O không vượt quá R ta gọi là ***hình tròn tâm O bán kính R*** và kí hiệu là $\mathscr{K}$ (O; R).

Định nghĩa các hình không gian

1. Định nghĩa mặt cầu và hình cầu: tâm và bán kính

Cho R là số thực dương và O là điểm cố định trong không gian.

a) Tập hợp $\mathscr{C}$ các điểm M trong không gian sao cho khoảng cách từ M tới O luôn không đổi và bằng R ta gọi là **mặt cầu tâm O bán kính R** và kí hiệu là $\mathscr{C}$(O; R).

b) Tập hợp $\mathscr{K}$ các điểm M trong không gian sao cho khoảng cách từ M tới O không vượt quá R ta gọi là **hình cầu tâm O bán kính R** và kí hiệu là $\mathscr{K}$(O; R).

2. Định nghĩa mặt trụ và hình trụ

Cho R là số thực dương, d là đường thẳng cố định trong không gian.

a) Tập hợp $\mathscr{T}$ các điểm M trong không gian sao cho khoảng cách từ M tới d luôn không đổi và bằng R gọi là **mặt trụ**, đường thẳng d gọi là **trục**, R gọi là **bán kính** của mặt trụ đó.

b) Tập hợp $\mathscr{TR}$ các điểm M trong không gian sao cho khoảng cách từ M tới d không vượt quá R gọi là **khối trụ**, đường thẳng d gọi là **trục**, R gọi là **bán kính** của khối trụ đó.

c) Hình $\mathscr{H}$ trong không gian được gọi là **hình đa diện** nếu nó được tạo thành từ một số hữu hạn miền đa giác sao cho mỗi điểm của $\mathscr{H}$ thuộc chỉ một trong các khả năng sau:

(i) Là điểm trong của đúng một trong các đa giác tạo thành;

(ii) Là điểm nằm trên cạnh của đúng hai đa giác liền kề;

(iii) Là đỉnh chung của một số các đa giác tạo thành.

Mỗi miền đa giác đã cho gọi là một **mặt**, mỗi cạnh chung của hai đa giác gọi là một **cạnh** và mỗi đỉnh chung gọi là một **đỉnh của hình đa diện đã cho**.

d) Mỗi hình đa diện chia không gian thành hai tập: một trong hai tập đó có thể chứa trọn vẹn một đường thẳng, ta gọi là **miền ngoài**, tập thứ hai gọi là **miền trong** của hình đa diện đó.

e) Hình tạo bởi hình đa diện cùng với miền trong của nó được gọi là **khối đa diện**.

Định nghĩa quan hệ giữa các hình hình học

Quan hệ bằng nhau

Phép biến đổi đẳng cự là quy tắc cho tương ứng mỗi điểm từ mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ vào chính nó (hoặc từ không gian $\mathbb{R}^3$ vào chính nó) sao cho khoảng cách giữa hai điểm qua phép biến đổi đó không thay đổi.

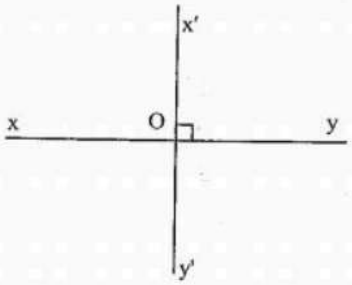
Các phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, đối xứng tâm, phép quay đều là phép biến đổi đẳng cự.

Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ gọi là bằng nhau nếu tồn tại một phép đẳng cự biến hình này thành hình kia.

Quan hệ vuông góc

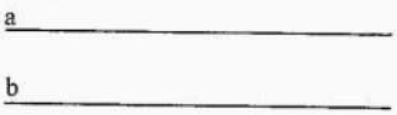
Hai đường thẳng xy và x′y′ cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc là góc vuông được gọi là **hai đường thẳng vuông góc** và kí hiệu là $xy \perp x'y'$.

Hai đường thẳng xy và x′y′ là hai đường thẳng vuông góc và cắt nhau tại O, ta còn nói đường thẳng xy vuông góc với đường thẳng x′y′ tại O.



Quan hệ song song

Hai đường thẳng gọi là song song nếu hai đường thẳng đó đồng phẳng và không có điểm chung.



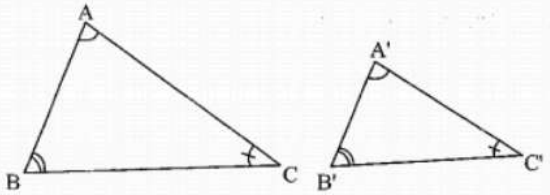
Đường thẳng a song song với đường thẳng b và kí hiệu là a // b.

Trong cùng một mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt nếu không cắt nhau thì song song với nhau.

Quan hệ đồng dạng

Định nghĩa hai tam giác đồng dạng: Tam giác ABC gọi là **đồng dạng** với tam giác A′B′C′, kí hiệu là $\Delta ABC \backsim \Delta ABC$ nếu $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ và $\hat{A} = \hat{A'}; \hat{B} = \hat{B'}; \hat{C} = \hat{C'}$.

Tỉ số $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$ được gọi là tỉ số đồng dạng của hai tam giác đó.



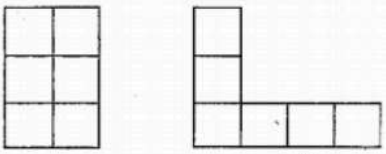
Hình đẳng hợp

Định nghĩa hai hình đẳng hợp: Hai đa giác $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$ gọi là **đẳng hợp** với nhau nếu tồn tại các hình $F_1, F_2, ..., F_n$ sao cho:

(i) Các hình đó đôi một không có điểm trong chung;

(ii) $\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ và $\mathcal{D}' = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$.

Ví dụ hình $\mathcal{H}$ đẳng hợp với hình $\mathcal{H}'$:



$\mathcal{H}$ $\mathcal{H}'$

Khái niệm về độ dài đoạn thẳng, chu vi, diện tích và thể tích các hình

*a) **Độ dài của đoạn thẳng*** là quy tắc cho tương ứng mỗi đoạn thẳng AB với một số thực dương sao cho:

(i) Hai đoạn thẳng bằng nhau thì độ dài của chúng cũng bằng nhau.

(ii) Nếu C là điểm nằm giữa A và C thì độ dài đoạn thẳng AB bằng tổng độ dài hai đoạn thẳng AC và CB.

Độ dài của đoạn thẳng AB ta cũng kí hiệu là AB và còn gọi là khoảng cách giữa hai điểm A và B.

*b) **Diện tích hình đa giác*** là quy tắc cho tương ứng mỗi hình đa giác $\mathcal{D}$ với một số thực $s(\mathcal{D})$ thoả mãn các tính chất sau:

(i) $s(\mathcal{D}) > 0$;

(ii) Nếu đa giác $\mathcal{D}$ được hợp thành từ hai hình đa giác không giao nhau $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$ thì $s(\mathcal{D}) = s(\mathcal{D}_1) + s(\mathcal{D}_2)$;

(iii) Nếu đa giác $\mathcal{D}_1$ nằm trọn trong đa giác $\mathcal{D}_2$ thì $s(\mathcal{D}_1) < s(\mathcal{D}_2)$;

(iv) Nếu hình vuông $\mathcal{O}$ có cạnh bằng 1 đơn vị độ dài thì $s(\mathcal{O}) = 1$ đơn vị diện tích.

*c) **Thể tích khối đa diện*** là quy tắc cho tương ứng mỗi khối đa diện $\mathcal{D}$ với một số thực $v(\mathcal{D})$ thoả mãn các tính chất sau:

(i) $v(\mathcal{D}) > 0$;

(ii) Nếu khối đa diện $\mathcal{D}$ được hợp thành từ hai khối đa diện không giao nhau $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$ thì $v(\mathcal{D}) = v(\mathcal{D}_1) + v(\mathcal{D}_2)$;

(iii) Nếu khối đa diện $\mathcal{D}_1$ nằm trọn trong khối đa diện $\mathcal{D}_2$ thì $v(\mathcal{D}_1) < v(\mathcal{D}_2)$;

(iv) Nếu khối lập phương $\mathcal{L}$ có cạnh bằng 1 đơn vị độ dài thì $v(\mathcal{L}) = 1$ đơn vị thể tích.

3.3. Yếu tố hình học trong môn Toán tiểu học

3.3.1. Hình thành các khái niệm hình học cho học sinh tiểu học

a. Hình thành khái niệm các hình hình học cho học sinh tiểu học

Trong môn Toán tiểu học, người ta hình thành cho học sinh khái niệm về hình hình học sau: Điểm, đoạn thẳng, đường gấp khúc, góc (góc nhọn, góc vuông,

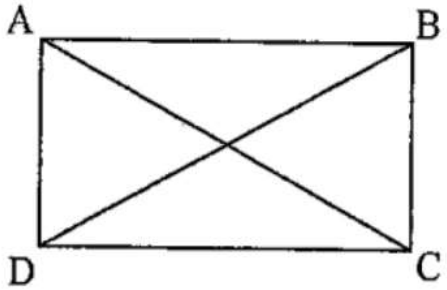
góc tù và góc bẹt), hình tam giác, hình tứ giác, hình chữ nhật, hình vuông, hình bình hành, hình thoi, hình thang, hình tròn, khối hộp chữ nhật, khối lập phương, hình trụ và hình cầu.

Đối với mỗi hình hình học thường được hình thành qua hai công đoạn: giới thiệu biểu tượng về hình đó và giới thiệu các dấu hiệu nhận biết đối với hình đó. Chẳng hạn:

Ví dụ 5. Hình thành khái niệm hình chữ nhật:

+ Giới thiệu khái niệm hình chữ nhật thông qua các biểu tượng trong thực tiễn có dạng hình chữ nhật: bìa sách, mặt bảng, mặt bàn học,...

+ Giới thiệu về dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật:

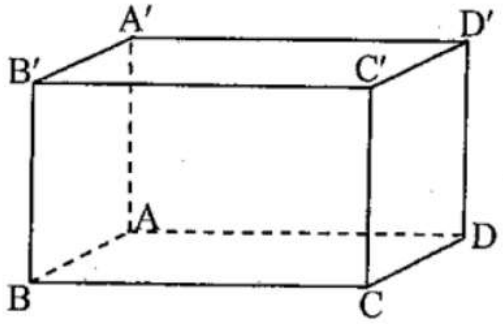


- Hình chữ nhật *ABCD* có bốn đỉnh là đỉnh *A*, đỉnh *B*, đỉnh *C*, đỉnh *D*;
- Có bốn cạnh là *AB=CD*, gọi là cạnh dài; *AD=BC* gọi là cạnh rộng. Độ dài của cạnh dài gọi là chiều dài và độ dài của cạnh rộng gọi là chiều rộng;
- Có bốn góc vuông là góc *A*, góc *B*, góc *C* và góc *D*;
- Có các cặp cạnh đối song song với nhau là *AB* song song với *CD* và *AD* song song với *BC*.
- Hai đường chéo *AC=BD*.

Ví dụ 6. Hình thành khái niệm hình hộp chữ nhật

+ Giới thiệu khái niệm hình hộp chữ nhật thông qua các biểu tượng về hình hộp chữ nhật: viên gạch, hộp phấn, bao diêm,...

+ Giới thiệu các dấu hiệu nhận biết về hình hộp chữ nhật:



- Hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* có tám đỉnh là đỉnh *A*, đỉnh *B*, đỉnh *C*, đỉnh *D*, dỉnh *A'*, đỉnh *B'*, đỉnh *C'*, đỉnh *D'*;
- Có 12 cạnh là AB=CD=A'B'=C'D', gọi là cạnh dài, AD=BC=A'D'=B'C' gọi là cạnh rộng, AA'=BB'=CC'=DD' gọi là chiều cao. Độ dài của cạnh dài gọi là chiều dài và độ dài của cạnh rộng gọi là chiều rộng;
- Có sáu mặt đều là hình chữ nhật: ABCD, A'B'C'D' gọi là mặt đáy, ABB'A', ADD'A', DCC'D', BCC'B' gọi là các mặt bên.

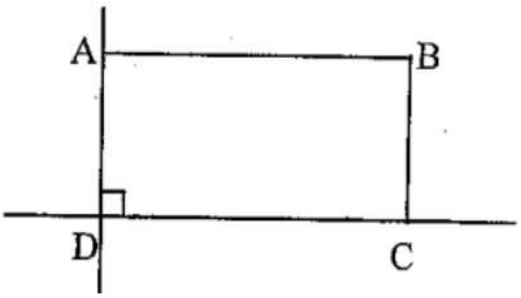
b. Hình thành khái niệm về quan hệ giữa các hình hình học

Ở tiểu học, hình thành các mối quan hệ sau giữa các hình hình học: quan hệ bằng nhau của hai đoạn thẳng, quan hệ lớn hơn và nhỏ hơn giữa các góc nhọn, góc vuông và góc tù; quan hệ song song và vuông góc giữa hai đường thẳng.

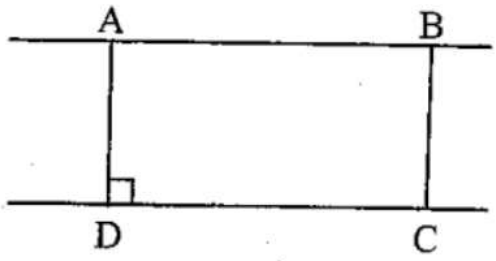
+ Hai đoạn thẳng bằng nhau là hai đoạn thẳng có số đo bằng nhau.

+ Góc vuông lớn hơn góc nhọn và nhỏ hơn góc tù.

+ Kéo dài hai cạnh *AD* và *DC* của hình chữ nhật ta được đường thẳng *AD* vuông góc với *DC*:



+ Kéo dài hai cạnh *AB* và *CD* của hình chữ nhật ta được đường thẳng *AB* song song với *CD:*

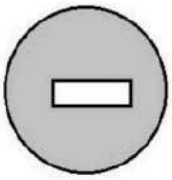


c. Khái niệm về chu vi, diện tích và thể tích các hình

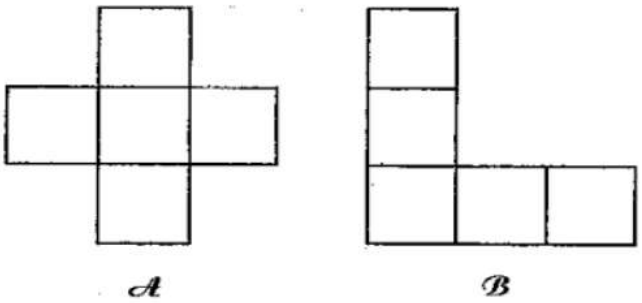
- Chu vi của hình tam giác (hoặc tứ giác) là tổng độ dài của các cạnh của hình đó.
- Khái niệm diện tích và thể tích được hình thành dựa trên các tiên đề về diện tích và thể tích các hình đã nêu ở phần trên. Chẳng hạn:

Ví dụ 7. Hình thành khái niệm diện tích (SGK Toán 3):

a. Hình chữ nhật nằm hoàn toàn trong hình tròn. Ta nói: diện tích hình chữ nhật bé hơn diện tích hình tròn.

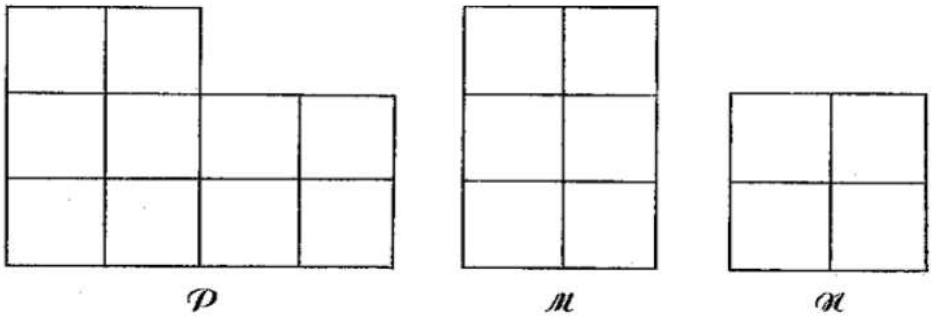


b. Hình $\mathcal{A}$ gồm 5 ô vuông như nhau và hình $\mathcal{B}$ cũng có 5 ô vuông như vậy. Diện tích hình $\mathcal{A}$ bằng diện tích hình $\mathcal{B}$.



c. Hình $\mathcal{P}$ gồm 10 ô vuông như nhau được tách thành hai hình $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$.

Ta nói: Diện tích hình $\mathcal{P}$ bằng tổng diện tích hai hình $\mathcal{M}$ và $\mathcal{N}$.



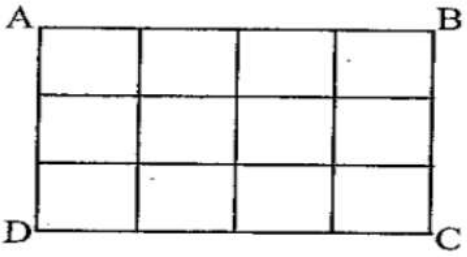
3.3.2. Xây dựng công thức tính chu vi, diện tích và thể tích các hình

Do đặc điểm về tư duy, trình độ nhận thức và đặc điểm tâm sinh lí của học sinh tiểu học, sách giáo khoa chọn phương pháp quy nạp không hoàn toàn để xây dựng các quy tắc, công thức tính diện tích và thể tích của các hình.

Cụ thể là: Để xây dựng công thức tính diện tích hoặc thể tích một loại hình nào đó, người ta đưa ra bài toán về tính diện tích (hoặc thể tích) của hình đó. Bằng thao tác phù hợp (chia ô hoặc cắt ghép,…) người ta rút ra cách tính diện tích (hoặc thể tích) hình này. Từ đó, rút ra quy tắc và công thức tổng quát cần thiết. Chẳng hạn:

Ví dụ 8. Xây dựng công thức tính diện tích hình chữ nhật:

Ta bắt đầu bằng bài toán: Tính diện tích hình chữ nhật ABCD có chiều dài 4cm và chiều rộng 3cm. Ta chia hình chữ nhật ABCD có chiều dài 4cm và chiều rộng 3cm. Ta chia hình chữ nhật ABCD thành 12 ô vuông bằng nhau (có cạnh 1cm) như hình vẽ:

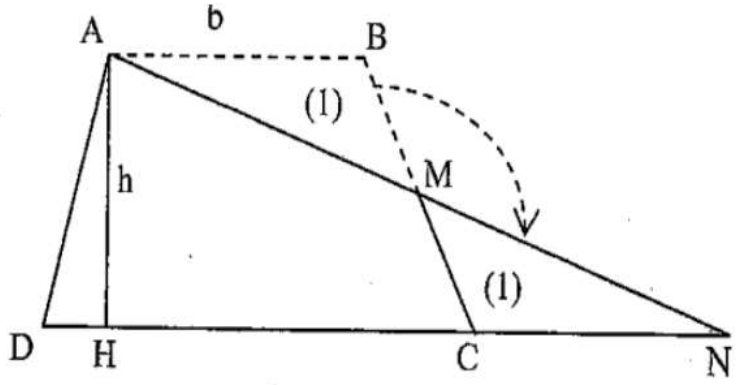


Dễ dàng nhận thấy diện tích 1 hình vuông bằng 1cm2. Vậy, diện tích hình chữ nhật *ABCD* bằng 12 cm2. Ta thấy:

12=4x3 từ đó rút ra quy tắc: "muốn tính diện tích hình chữ nhật, ta lấy chiều dài nhân với chiều rộng (cùng đơn vị). *S*=*a*x*b* trong đó *a* là chiều dài, *b* là chiều rộng.

Ví dụ 9. Xây dựng công thức tính diện tích hình thang

Ta bắt đầu với bài toán: Tính diện tích hình thang ABCD có đáy lớn bằng a, đáy nhỏ bằng b và chiều cao bằng h. Ta dùng một mảnh bìa hình thang có đáy lớn bằng a, đáy bé bằng b và chiều cao bằng h. Ta cắt mảnh bìa hình thang rồi ghép lại để được một hình tam giác như hình vẽ:



Theo cách cắt ghép ta có:

$$S_{ABCD} = S_{ADN} = \frac{(DC \times CN)}{2} = \frac{(AH + DC) \times AB}{2} = \frac{AH}{2} \times \frac{a\ b}{2} \quad h$$

Quy tắc: Muốn tính diện tích hình thang, ta lấy đáy lớn cộng đáy bé nhân với chiều cao (cùng đơn vị đo) rồi chia cho 2.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 10. Nêu các nhóm khái niệm hình thành trong môn Toán phổ thông.

Bài 11. Nêu cách hình thành khái niệm: góc vuông, hình bình hành, hình thoi, hình thang, hình tròn và đường tròn, hình lập phương trong sách giáo khoa Toán tiểu học.

So sánh với định nghĩa các khái niệm đó trong môn Toán phổ thông.

Bài 12. Nêu cách hình thành khái niệm hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song trong sách giáo khoa Toán tiểu học.

So sánh với định nghĩa các khái niệm đó trong môn Toán phổ thông.

Bài 13. Nêu cách hình thành khái niệm diện tích và thể tích trong sách giáo khoa tiểu học.

So sánh với định nghĩa các khái niệm đó trong toán học.

Bài 1. Nêu các thành tố cơ bản của phương pháp tiên đề trong hình học.

Bài 2. Trình bày định nghĩa các hình hình học.

Bài 3. Trình bày định nghĩa các quan hệ: bằng nhau, vuông góc, song song, đồng dạng, đẳng hợp giữa các hình hình học.

Bài 4. Trình bày định nghĩa các khái niệm: độ dài, diện tích và thể tích.

Bài 5. Trình bày khái niệm và các bước giải hai bài toán về xác định các hình hình học. Cho ví dụ.

Bài 6. Cho hình chữ nhật ABCD.

a) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách từ M tới bốn cạnh của hình chữ nhật bằng nửa chu vi của hình đó.

b) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách từ M tới hình chữ nhật ABCD không vượt quá độ dài h cho trước.

Bài 7. Cho góc xOy và một điểm I nằm trong góc đó. Hãy dựng đường thẳng đi qua M, cắt Ox tại A và Oy tại B sao cho AI = IB.

Bài 8. Dựng tứ giác ABCD sao cho AB = BC = CD và cho biết các trung điểm M, N, I của ba cạnh bằng nhau đó.

Bài 9. Cho đoạn thẳng a. Hãy dựng các đoạn thẳng:

a) $x = \frac{a(\sqrt{11}-1)}{2}$;

b) $y = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{3}$.

Bài 10. Nêu các nhóm khái niệm hình thành trong môn Toán phổ thông.

Bài 11. Nêu cách hình thành khái niệm: góc vuông, hình bình hành, hình thoi, hình thang, hình tròn và đường tròn, hình lập phương trong sách giáo khoa Toán tiểu học.

So sánh với định nghĩa các khái niệm đó trong môn Toán phổ thông.

Bài 12. Nêu cách hình thành khái niệm hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song trong sách giáo khoa Toán tiểu học.

So sánh với định nghĩa các khái niệm đó trong môn Toán phổ thông.

Bài 13. Nêu cách hình thành khái niệm diện tích và thể tích trong sách giáo khoa tiểu học.

So sánh với định nghĩa các khái niệm đó trong toán học.

Bài 14. Khi xây dựng công thức tính diện tích và thể tích các hình trong sách giáo khoa tiểu học người ta đã sử dụng phương pháp gì trong logic toán?

Bài 15. Hãy nêu cách xây dựng công thức:

a) Tính diện tích hình bình hành, hình thoi, hình tam giác;

b) Tính thể tích hình hộp chữ nhật và khối lập phương trong sách giáo khoa toán tiểu học.

Bài 16. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích $180cm^2$. M, N lần lượt thuộc các cạnh BC và CD sao cho BM = CM, DN = 2CN. Tính diện tích tam giác AMN.

Bài 17. Cho hình chữ nhật ABCD. M là một điểm thuộc BC. N là trung điểm MC, I là trung điểm DN. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD biết diện tích tam giác MNI bằng $20cm^2$.

Bài 18. Cho tam giác ABC có BC = 20cm, AC = 24cm. Tính AM, CN, biết $S_{ABN} = S_{AMI} = S_{MNI} = S_{MNC}$.

Bài 19. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC; AM cắt BN tại O.

a) So sánh diện tích tam giác AON và diện tích tam giác BOM.

b) So sánh diện tích tam giác OAB và diện tích tam giác OAC.

c) So sánh diện tích tam giác OAB và diện tích tam giác OBC.

d) Tính tỉ số $\frac{OA}{OM}$.

e) Nối C với O, CO cắt AB tại E. So sánh AE và BE.

Bài 20. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt nằm trên các cạnh AC, BC sao cho: AM = CM, BN = 2NC. Nối A với N, B với M. AN cắt BM tại O. Tính diện tích tam giác OAM, biết diện tích tam giác ABC bằng $200cm^2$.

Bài 21. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AC. E, F nằm trên cạnh AB sao cho: AE = EF = BF. Tính diện tích tam giác ABC, biết diện tích tam giác MEF bằng $5cm^2$.

Bài 22. Cho tam giác ABC có M nằm trên cạnh AB sao cho AM = 2BM. N nằm trên cạnh AC sao cho BMNC là hình thang.

a) Tính tỉ số $\frac{AN}{CN}$;

b) Tính diện tích tam giác AMN, biết tam giác ABC có diện tích $36cm^2$.

Bài 23. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trên cạnh AB sao cho AM = MF = FB. Điểm N và E nằm trên cạnh AC sao cho MNCB và EFBC là hình thang.

a) So sánh AN, NE và CE.

b) Tính diện tích tứ giác MNEF, biết diện tích tam giác ABC bằng $36cm^2$.

Bài 24. Cho tam giác ABC có M là trung điểm đoạn AC. Kéo dài AB một đoạn BD = AB. Nối D với M, DM cắt BC tại I. Tính độ dài đoạn BI, biết độ dài đoạn BC bằng 9cm.

Bài 25. Một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có chiều dài 12dm, chiều rộng 6dm, chiều cao 4dm. Người ta xếp vào đó những khối lập phương bằng nhau sao cho vừa đầy khít thùng. Tính số khối lập phương ít nhất có thể xếp được vào thùng. Mỗi khối lập phương đó có thể tích bằng bao nhiêu? Biết độ dài cạnh khối lập phương là một số tự nhiên tính theo đơn vị đề-xi-mét.

Bài 26. Một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có chiều dài 12cm, chiều rộng 9cm, chiều cao 6cm. Người ta xếp vào đó những khối lập phương bằng nhau sao cho vừa đầy khít thùng. Tính số khối lập phương ít nhất có thể xếp được vào thùng. Mỗi khối lập phương đó có thể tích bằng bao nhiêu? Biết độ dài cạnh khối lập phương là một số tự nhiên tính theo đơn vị xăng-ti-mét.

Bài 27. Một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có ba kích thước chiều dài, chiều rộng, chiều cao tỉ lệ với các số 3, 2, 1 (chiều dài : chiều rộng : chiều cao = 3 : 2 : 1). Nếu xếp vào thùng 48 chiếc hộp hình lập phương cạnh 30cm thì vừa đầy thùng. Tính các kích thước của chiếc thùng.

Tài liệu tham khảo

Giáo trình chính:

1. Hoàng Nam Hải (2021), *Cơ sở toán học của việc dạy học toán tiểu học Tập 1*, NXB Đẵ Nẵng,
2. Phan Hữu Chân - Nguyễn Tiến Tài (1996), *Tập hợp - Lôgic và số học,* NXB Giáo dục.

Tài liệu tham khảo:

3. Trần Diên Hiển - Nguyễn Văn Ngọc (1997), *Giáo trình Toán cao cấp 1,* NXB Giáo dục.
4. Trần Diên Hiển (chủ biên) (2006), *Toán và phương pháp dạy học toán ở tiểu học* (Tài liệu đào tạo giáo viên, dự án phát triển giáo viên tiểu học), NXB Giáo dục.
5. Bùi Huy Hiển - Nguyễn Hữu Hoan (2012), *Bài tập đại số và số học tập 1*, NXB ĐHSP.
6. Hoàng Nam Hải – Mã Thanh Thủy (2017), Giáo trình Toán cơ sở, NXB Đà Nẵng.